Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 280-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__280_1>

CORRESPONDANCE.

M. G. F. — La formule barycentrique

$$\sum \alpha \overline{MA}^2 = \lambda \overline{MG}^2 + \text{const.} \tag{1}$$

n'est, au fond, qu'une transformation de la formule

$$\sum \alpha z = \lambda Z,$$

du moins si l'on rattache la géométrie euclidienne à la géométrie aneuclidienne. La seconde formule provient d'une formule en sinus hyperboliques; la première provient d'une formule équivalente en cosinus hyperboliques, dans laquelle on remplace $\operatorname{ch} x$ par $1 + \frac{x^2}{2}, \cdots$

Quoi qu'il en soit, la *détermination de la constante* peut d'abord se faire en mettant le point M en G, et c'est le procédé classique: la constante se présente alors sous la forme

$$C = \sum \alpha \overline{GA}^2. \tag{2}$$

Pour avoir l'autre forme de la constante, celle sur laquelle M. Hilaire a rappelé récemment l'attention des lecteurs du

Journal, on peut mettre successivement le point M en A, B, ...; on a ainsi

$$
\begin{array}{l}
\ldots\ldots + \beta\overline{AB}^2 + \gamma\overline{AC}^2 + \ldots = \lambda\overline{AG}^2 + C,\\
\alpha\overline{BA}^2 + \ldots\ldots + \gamma\overline{BC}^2 + \ldots = \lambda\overline{BG}^2 + C,\\
\alpha\overline{CA}^2 + \beta\overline{CB}^2 + \ldots\ldots + \ldots = \lambda\overline{CG}^2 + C,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}
$$

si l'on ajoute ces égalités multipliées respectivement par α, β, γ, ..., on a, en tenant compte de l'expression ci-dessus de C,

$$2\sum\alpha\beta.\overline{AB}^2 = \lambda C + \lambda C = 2\lambda C,$$

ou

$$C = \frac{1}{\lambda}\sum\alpha\beta.\overline{AB}^2. \tag{3}$$

La formule (1), avec l'expression (3) de la constante C, est démontrée dans le *Cours de Mécanique* de Sturm en partant des formules

$$\sum\alpha x = \lambda X, \qquad \sum\alpha y = \lambda Y, \qquad \sum\alpha z = \lambda Z;$$

on élève au carré, on ajoute, etc.