Nouvelles annales de mathématiques

Émile Turrière

Une application géométrique de la série considérée par Airy dans la diffraction des ouvertures circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 433-441

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__433_0>

[O[1]5n]

UNE APPLICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SÉRIE CONSIDÉRÉE PAR AIRY DANS LA DIFFRACTION DES OUVERTURES CIRCULAIRES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Airy (1) a considéré la série absolument convergente pour toute valeur de m,

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m^2}{2!}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{m^3}{3!}\right)^2+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{m^n}{n!}\right)^2+\ldots,$$

dont il a donné la Table pour les valeurs de m variant de dixièmes en dixièmes de o à 6. Cette série a une grande importance dans l'étude des images fournies par les instruments d'optique.

Je signale qu'elle intervient dans la détermination des *lignes de plus grande pente de la surface d'équation*

$$z = y(5x^2 - y^4),$$

par rapport à des axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, ce dernier étant vertical.

La surface du cinquième degré considérée offre un certain intérêt. Elle est engendrée par des paraboles $y=$ const. assujetties à rencontrer deux paraboles du plan Oxy; en projection sur Oxz, ces paraboles forment une famille telle qu'il passe cinq paraboles par tout point de ce plan; l'équation, par rapport au paramètre, se présente sous une forme qui se ramène

(1) AIRY, *On the diffraction of an object-glass with a circular aperture* (*T. C. P. S.*, t. V, 1834).

immédiatement à celle que prête, comme forme canonique, le théorème de Jerrard à l'équation générale du cinquième degré.

Les lignes asymptotiques (des deux familles) *sont algébriques ;* leurs projections sur Oxy sont les courbes

$$4x^2(x^2+2y^4)^3 = (y^8+10x^2y^4-2x^4-\lambda)^2,$$

parmi lesquelles se trouvent les paraboles

$$y^2 \pm 2x = 0.$$

En posant

$$x^2 = 4\xi, \qquad y^2 = \frac{2}{\eta},$$

l'équation des lignes de plus grande pente prend la forme d'une équation de Riccati

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 - \frac{1}{\xi} = 0;$$

cette équation est équivalente à l'équation du second ordre

$$\xi \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} - \zeta = 0,$$

c'est-à-dire à *l'équation du mouvement d'un pendule simple dont la longueur croît proportionnellement au temps* (seau dans un puits) *et dans le cas des petites oscillations* ([1]).

Du point de vue de la forme, l'équation précédente du second ordre est un cas particulier d'équations con-

---

([1]) Bossut, *Sur le mouvement d'un pendule dont la longueur est variable* (*M. A. P.*, 1778).

sidérées par Lobatto [1] et par Kummer [2], mais ce n'est pas un des cas particuliers pour lesquels ils ont effectué l'intégration au moyen d'intégrales définies. J'ai obtenu une intégrale de cette nature,

$$\zeta_1 = \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{\xi}{\alpha}\right)} d\alpha,$$

en considérant l'équation comme une équation linéaire de Laplace et en effectuant une inversion et une symétrie dans le plan de la variable complexe. L'intégrale ainsi obtenue coïncide avec celle que Poisson donne pour l'équation plus générale

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \xi^\mu \zeta.$$

L'équation adjointe de l'équation mise sous la forme

$$\xi \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} - \zeta = 0$$

est, ainsi que l'équation elle-même, un cas particulier de l'équation en laquelle dégénère l'équation de Bessel, lorsque l'un des points singuliers s'éloigne à l'in-

---

(1) LOBATTO, *Sur l'intégration des équations*

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + abx^n y = 0$$

par des intégrales définies (*Crelle*, t. 17).

(2) KUMMER, *Sur l'intégration générale de l'équation de Riccati par des intégrales définies* (*Crelle*, t. 12).

KUMMER, *Note sur l'intégration de l'équation* $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ *par des intégrales définies* (*Crelle*, t. 19).

KUMMER, *Sur l'intégration de l'équation* $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ (*J. M.*, 1re série, t. IV).

fini :

$$\xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \gamma \frac{du}{d\xi} - u = 0;$$

l'équation primitive s'obtient en posant $\gamma = 0$; l'équation adjointe s'obtient en posant $\gamma = 2$. Cette équation adjointe est d'ailleurs équivalente [1] à l'équation primitive; il suffit de poser

$$\zeta = u\xi.$$

De cette équation de Bessel on connaît l'intégrale

$$u = 1 + \frac{1}{\gamma}\frac{\xi}{1} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{\xi^n}{n!},$$

lorsque γ n'est pas nul; en particulier, pour $\gamma = 2$, cette série est

$$u_2 = 1 + \frac{\xi}{2} + \ldots + \frac{\xi^n}{(n+1)[n!]^2},$$

c'est-à-dire la série d'Airy, à condition de poser

$$\xi = -m^2.$$

On obtient donc une intégrale particulière ζ_2

$$\zeta_2 = \xi\left[1 + \frac{\xi}{2} + \ldots + \frac{\xi^n}{(n+1)[n!]^2} + \ldots\right],$$

qui est celle que M. Lecornu [2] a obtenue par la méthode des coefficients indéterminés.

Observons que les intégrales ζ_1 et ζ_2 sont dis-

---

[1] L'équation mise sous la forme $\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} - \frac{\zeta}{\xi} = 0$ est une des équations d'ordre *pair* (M. Darboux a mis en évidence la nécessité de cette distinction) qui sont identiques à leur adjointe, et qui, du point de vue de la théorie de la variation seconde des intégrales simples, ont été étudiées par Jacobi, par Bertrand et par Hesse.

[2] LECORNU, *Mémoire sur le pendule de longueur variable* (*A. M.*, t. XIX).

tinctes : ζ_1, en effet, n'est pas développable en série de Mac-Laurin. Observons en second lieu que la somme de la série d'Airy s'exprime au moyen de la fonction J_1 de Bessel et qu'elle a pour expression $\frac{1}{m} J_1(2m)$.

En résumé, *de l'équation du second ordre, nous connaissons une intégrale* ζ_1

$$\zeta_1 = \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{\xi}{\alpha}\right)} d\alpha,$$

et une intégrale ζ_2 *qui s'exprime à l'aide de la série d'Airy ou, ce qui revient au même, à l'aide de la fonction de Bessel d'indice* un *et de première espèce.*

La détermination des lignes de plus grande pente est donc complètement effectuée; l'équation cartésienne de leurs projections est

$$y^2 = -2\,\frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{x^2}{4\alpha}\right)} d\alpha + iCx\,J_1(ix)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{x^2}{4\alpha}\right)} \frac{d\alpha}{\alpha} + 2CJ_0(ix)},$$

C étant la constante arbitraire *réelle* d'intégration; l'imaginaire i ne s'introduit qu'en apparence.

Remarquons que chacune des deux intégrales de l'équation du second ordre eût permis d'effectuer cette détermination à l'aide d'une seule quadrature; en désignant, en effet, par ζ_0 une intégrale particulière de l'équation du second ordre et par η_0 l'intégrale particulière correspondante

$$\eta_0 = \frac{1}{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\xi}$$

de l'équation de Riccati, l'intégrale générale de l'équation du second ordre est

$$\zeta = \zeta_0\left(A + B\int \frac{d\xi}{\zeta_0^2}\right),$$

et l'intégrale générale de l'équation de Riccati est

$$\eta = \eta_0 + \frac{1}{\zeta_0^2\left(\int \frac{d\xi}{\zeta_0^2} + C\right)};$$

A, B, C désignent des constantes ([1]).

Généralisation. — Considérons *l'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{X},$$

dans laquelle X *est un trinome du second degré en* x.

Lorsque X est une constante, l'équation s'intègre par des fonctions élémentaires. Lorsque X est du premier degré, l'équation est celle que nous venons d'étudier. Lorsque X est du second degré et à racines confondues, l'équation est réductible à l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{x^2},$$

dont M. Raffy a donné l'intégrale générale

$$\frac{2xy - (1 + \sqrt{5})}{2xy - (1 - \sqrt{5})} x^{\sqrt{5}} = \text{const.}$$

à la page 545 des *Nouvelles Annales* de 1902.

([1]) Ces formules s'appliquent à l'équation générale de Riccati mise sous la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \Xi(\xi),$$

lorsqu'une intégrale particulière ζ_0 de l'équation du second ordre est connue.

Examinons donc le cas où X est un trinome du second degré à racines distinctes :

$$X \equiv K(x-a)(x-b).$$

L'équation équivalente du second ordre est, en prenant la nouvelle variable ξ définie par la relation

$$x = a + (b-a)\xi,$$

une équation de Gauss pour laquelle γ est nul, pour laquelle, par conséquent, on ne connaît pas d'intégrale. En procédant comme plus haut, on est conduit à une équation de Gauss

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2(1-2\xi)\frac{dz}{d\xi} - \left(2 - \frac{1}{K}\right)z = 0,$$

pour laquelle γ est égal à 2 et pour laquelle α et β sont les racines de l'équation

$$u^2 - 3u + 2 - \frac{1}{K} = 0.$$

Pour la double raison que γ d'une part et $\alpha + \beta - \gamma$ d'autre part sont des nombres entiers, on ne connaît pas les vingt-quatre intégrales de Kummer.

Appliquons les résultats trouvés par M. Goursat [1] pour le cas où γ est un entier de la forme

$$\gamma = 2 + m;$$

m est nul. Le cas exceptionnel d'une intégrale uniforme dans le voisinage de l'origine ne peut se présenter; la suite

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad m+1$$

---

(1) Goursat, *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique* (*A. E. N.*, 1881).

se réduit en effet à 1; si α était égal à 1, β devrait être égal à 2 et K devrait être infini.

On a deux intégrales:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$
$$\operatorname{Log}\xi . F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) + \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

dans lesquelles α, β, γ doivent être remplacés par leurs valeurs; Φ est défini par la formule

$$\Phi = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F}{\partial \gamma},$$

ou

$$\Phi = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n+1} \frac{\xi^n}{[n!]^2},$$

en posant

$$A_n = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha+n-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\beta+n-1} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right);$$

le développement de F est divergent pour $\xi \geqq 1$.

Deux intégrales de l'équation du second ordre étant connues, *l'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{K(x-a)(x-b)}$$

est intégrée.

Les racines distinctes a, b de X ne jouant aucun rôle, *les équations de Riccati considérées se classent d'après les valeurs de* K.

Pour $K = -\frac{1}{4}$, α et β sont égaux entre eux et à $\frac{3}{2}$.

Pour $\frac{1}{K} = N(N+1)$, N étant un nombre entier, α

et β sont des nombres entiers :

$$\alpha = 2 + N,$$
$$\beta = 1 - N.$$

Pour $K = \frac{1}{2}$, l'un des paramètres α, β est nul; *l'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{2}{(x-a)(x-b)}$$

s'intègre au moyen des fonctions élémentaires, et son intégrale générale est

$$y = \frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)} - \frac{\dfrac{(a-b)^2}{(x-a)^2(x-b)^2}}{\dfrac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)} - \dfrac{2}{a-b}\operatorname{Log} C\dfrac{x-a}{x-b}}.$$

Ce cas est le seul pour lequel la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ dégénère en une des fonctions élémentaires signalées par Gauss : le seul cas qui mérite d'être examiné est celui de la fonction

$$(t+u)^n - t^n = nt^{n-1}u\,F\left(1-n,\ 1,\ 2,\ -\frac{u}{t}\right);$$

K devrait être infini, puisqu'on devrait avoir

$$n = -1, \qquad \alpha = 2, \qquad \beta = 1.$$