Émile Turrière

Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 24-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__24_1>

[N[1]1i]

CONSÉQUENCES DE DEUX THÉORÈMES DE M. BRICARD CONCERNANT LES TANGENTES COMMUNES A DEUX QUADRIQUES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. On doit à M. R. Bricard (*Nouvelles Annales*, 1908) le théorème suivant : *Si une droite varie en touchant*

(1) *Voir* le présent Numéro, p. 24.

constamment deux quadriques homofocales, les plans tangents menés par cette droite aux diverses quadriques homofocales aux deux premières forment un faisceau de grandeur constante.

Considérons le complexe des arêtes des dièdres de grandeur constante donnée dont les faces touchent une quadrique donnée H_0; soit (γ) une courbe plane du complexe; toute tangente δ de (γ) est touchée par deux quadriques H_1, H_2 du système homofocal H auquel appartient la quadrique H_0. Puisque δ est un rayon du complexe, la congruence des tangentes communes à H_1 et à H_2 appartient au complexe, d'après le théorème de M. Bricard.

Lorsque δ varie en touchant (γ), cette congruence varie en dépendant d'un paramètre et engendre le complexe. Cette congruence, d'autre part, est une congruence de normales (Chasles) à une famille de surfaces dont on connaît l'équation (Liouville). Une famille à un paramètre de congruences de normales appartenant au complexe étant connue, il résulte d'un théorème fondamental de M. Darboux que toutes les congruences de normales appartenant au complexe sont connues; toutes les surfaces dont les normales appartiennent au complexe sont elles aussi connues et leur équation générale se déduit de l'équation donnée par Liouville, sans introduction de quadratures.

Il résulte donc du théorème de M. Bricard que *le problème de Transon est résolu pour le complexe des arêtes des dièdres de grandeur constante donnée dont les faces touchent une quadrique donnée.*

Le problème est équivalent à celui des géodésiques d'une quadrique générale.

2. Considérons le cas particulier du complexe de Painvin attaché à une quadrique à centre.

Les axes coordonnés $Oxyz$ sont rectangulaires ; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 désignent les coordonnées plückériennes d'une droite, les trois premières étant les cosinus directeurs.

Le complexe quadratique spécial attaché à la quadrique à centre H_0 d'équation tangentielle

$$A u^2 + B v^2 + C w^2 = 1$$

a pour équation

$$A p_4^2 + B p_5^2 + C p_6^2 - BC p_1^2 - CA p_2^2 - AB p_3^2 = 0;$$

par simple soustraction des premiers membres des équations des complexes quadratiques spéciaux attachés aux deux quadriques H_1 et H_2 du faisceau homofocal

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} - \frac{z^2}{C+\lambda} - 1 = 0,$$

qui correspondent aux deux valeurs symétriques $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$ du paramètre, on vérifie que la congruence commune aux complexes quadratiques spéciaux attachés à H_1 et à H_2 appartient au complexe de Painvin

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 - (B+C) p_1^2 - (C+A) p_2^2 - (A+B) p_3^2 = 0.$$

attaché à la quadrique H_0. Introduisons les coordonnées de Bonnet par les formules que j'ai données à la page 254 des *Nouvelles Annales* de 1909. Les surfaces dont les normales appartiennent au complexe de Painvin sont, en coordonnées de Bonnet, intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varpi}{\partial u}\frac{\partial\varpi}{\partial v}(1+uv)^4\\ &\quad = (B+C)(u+v)^2 - (C+A)(u-v)^2 + (A+B)(uv-1)^2,\end{aligned}$$

qu'on peut intégrer, d'après ce qui précède, en introduisant l'intégrale de Liouville.

3. Une première généralisation du complexe de Painvin est le complexe d'équation

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = f(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$$

des droites dont la distance à un point fixe est une fonction donnée des cosinus directeurs; ce complexe est un des complexes invariants dans la transformation de droites que j'ai étudiée dans les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 255). Pour un tel complexe, le problème de Transon est équivalent à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u}\frac{\partial \varpi}{\partial v} = \mathrm{F}(u, v),$$

et, par conséquent, à la détermination des géodésiques de la surface la plus générale rapportée à ses lignes de longueur nulle.

Le problème de Transon pour le complexe de Painvin étant résolu, il en est donc de même du problème des géodésiques pour les surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{a(x+y)^2 + b(x-y)^2 + c(xy-1)^2}{(1+xy)^4}\, dx\, dy.$$

Il en résulte encore qu'on peut déterminer et ramener à la détermination des géodésiques d'une quadrique à centre le mouvement du centre de gravité d'un corps solide quelconque à point fixe O, chaque élément du corps étant attiré ou repoussé par trois plans rectangulaires (ou par trois axes rectangulaires) passant par O proportionnellement aux distances de cet élément aux plans (ou aux axes).

4. Dans le cas particulier où le complexe général du n° 3 est de révolution autour de Oz, F est une fonction quelconque du produit uv; les équations différentielles des caractéristiques présentent alors la combinaison intégrable

$$d\left(\frac{\partial\varpi}{\partial u}u - \frac{\partial\varpi}{\partial v}v\right) = 0,$$

dont se déduit une intégrale complète

$$\varpi = a\,\mathrm{Log}\,\frac{u}{v} + \int \frac{\sqrt{uv\mathrm{F} + a^2}}{uv}\,d(uv) + \text{const.}$$

Il est encore commode, pour ce même cas, de considérer les surfaces dont les normales appartiennent au complexe comme enveloppes du plan

$$x\cos\varphi\cos\psi + y\cos\varphi\sin\psi + z\sin\varphi = \varpi;$$

l'équation à intégrer est à variables séparées (propriété des complexes de révolution) :

$$\left[\Phi(\varphi) - \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\right)^2\right]\cos^2\varphi = \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\psi}\right)^2;$$

on retrouve ainsi l'intégrale complète précédente.

Les considérations relatives aux complexes de Painvin de révolution s'appliquent au cas particulier intéressant, du moins au point de vue historique, du complexe spécial des tangentes à une sphère de centre O. L'intégrale complète est alors

$$\frac{\varpi}{\mathrm{R}} = a\psi + \operatorname{arc\,tang} t - a \operatorname{arc\,tang}(at) + b;$$

R représente le rayon de la sphère; a et b sont deux constantes, et l'on a posé

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{1 - a^2}\,t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

5. Une autre généralisation du complexe de Painvin attaché à une quadrique à centre est le complexe des

sécantes harmoniques de deux sphères (Loria et Segre). Prenant pour axe Oz la ligne des centres et pour plan Oxy le plan radical, l'équation

$$\begin{aligned} &p_4^2+p_5^2+p_6^2-c(p_1^2+p_2^2+p_3^2)\\ &\quad+(a+b)(p_1p_5-p_2p_4)-abp_3^2=0 \end{aligned}$$

représente le complexe des droites qui coupent harmoniquement les deux sphères

$$x^2+y^2+z^2-2az-c=0, \qquad x^2+y^2+z^2-2bz-c=0.$$

L'équation des surfaces dont les normales appartiennent au complexe est

$$\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\psi}\right)^2-(a+b)\sin\varphi\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}-ab\sin^2\varphi-c=0;$$

les variables se séparent et, en posant

$$\begin{gathered} u=\sin\varphi, \qquad R=A_0u^4+A_1u^2+A_2,\\ 4A_0=(a-b)^2, \qquad -2A_1=a^2+b^2+2c,\\ A_2=\frac{(a+b)^2}{4}+c-A^2, \end{gathered}$$

on a l'intégrale complète, dépendant d'intégrales elliptiques des trois espèces,

$$\begin{aligned} \varpi=A\psi+\frac{a+b}{2}u+B+(A_0+A_1)\int\frac{du}{\sqrt{R}}\\ +A_0\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{R}}+(A_0+A_1+A_2)\int\frac{du}{(u^2-1)\sqrt{R}}; \end{aligned}$$

A et B sont des constantes.

6. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le complexe de Painvin était attaché à une quadrique à centre. Considérons maintenant le cas des complexes de Painvin attachés aux paraboloïdes, complexes qui interviennent dans la théorie des axes

d'inertie des systèmes matériels de masse totale nulle.

Étant donné un paraboloïde

$$Au^2 + Bv^2 - 2w + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

l'équation du complexe quadratique spécial attaché à ce paraboloïde est

$$\begin{aligned} p_6^2 - 2(A+\lambda)p_2p_4 + 2(B+\lambda)p_1p_5 \\ - \lambda(B+\lambda)p_1^2 - \lambda(A+\lambda)p_2^2 - (A+\lambda)(B+\lambda)p_3^2 = 0; \end{aligned}$$

la congruence commune aux deux complexes spéciaux attachés aux paraboloïdes de paramètres λ et $-\lambda$ du faisceau homofocal appartient au complexe de Painvin

$$2(p_2p_4 - p_1p_5) + Bp_1^2 + Ap_2^2 + (A+B)p_3^2 = 0,$$

attaché au paraboloïde de paramètre nul; le théorème de M. Bricard est ainsi vérifié dans ce nouveau cas particulier.

Ψ désignant une fonction arbitraire de ψ, l'équation générale des surfaces dont les normales appartiennent au complexe est

$$\begin{aligned} 2\varpi = \sin\varphi(A\cos^2\psi + B\sin^2\psi) \\ -(A+B)\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \Psi. \end{aligned}$$

Le terme logarithmique disparaît dans le cas où le paraboloïde est équilatère : l'équation générale des surfaces dont les normales appartiennent au complexe de Ball (*The theory of screws*, p. 21) est donc

$$2\varpi = A\sin\varphi\cos 2\psi + \Psi.$$

7. Dans les *Nouvelles Annales* de 1909, revenant sur son travail de 1908, M. Bricard a donné un nouveau théorème *Sur les quadriques circonscrites à deux sphères*. De ce second théorème, en se bornant

aux complexes de Painvin, il résulte que *la congruence des tangentes communes à deux sphères* (S) *et* (S′) *appartient au complexe de Painvin attaché à la quadrique dégénérée tangentiellement en les deux centres de similitude* σ *et* σ' *des deux sphères*.

Maintenons fixes les centres S et S′ des deux sphères et constant le rapport des rayons : σ et σ' sont alors fixes, et la congruence engendre le complexe. En d'autres termes, il résulte du second théorème de M. Bricard que *le complexe des droites dont le rapport des distances à deux points est constant est identique au complexe de Painvin attaché à une quadrique dégénérée tangentiellement en deux points*. Nous retrouvons ainsi un théorème du Mémoire de M. Léry *Sur les courbes pour lesquelles le rapport des distances de leurs tangentes à deux points fixes est constant* (*Nouvelles Annales*, 1902).

Ce complexe est une dégénérescence du complexe de Painvin attaché à une quadrique de révolution, et, à ce titre, il est une dégénérescence du complexe des sécantes harmoniques de deux sphères : les deux sphères sont alors tangentes.

Voici de nouvelles propriétés de ce complexe ; la première est immédiate ; quant à la seconde, qui constitue une extension d'un théorème de M. Darboux, j'en donnerai la démonstration ultérieurement.

Si un quadrilatère articulé gauche ABCD *à diagonales* AC *et* BD *orthogonales se déforme*, *deux de ses sommets consécutifs* A *et* B *restant fixes*, *la perpendiculaire commune aux diagonales engendre le complexe de Painvin pour la quadrique formée par les points* A *et* B.

De même, *si un quadrilatère articulé gauche* ABCD, *provenant de la déformation d'un quadri-*

latère plan circonscriptible à un cercle, se déforme, deux de ses sommets consécutifs A *et* B *restant fixes, la droite lieu des centres des sphères inscrites au quadrilatère gauche* ABCD *engendre un complexe de Painvin attaché à une quadrique dégénérée en deux points. Ces deux points sont les extrémités du segment qui divise harmoniquement les deux diagonales* AC *et* BD *du quadrilatère quand il est amené dans la position pour laquelle il a ses quatre sommets en ligne droite.*

Réciproquement tout complexe de Painvin pour une quadrique dégénérée en deux points est susceptible d'une telle génération.

8. Dans le cas où les deux sphères (S) et (S′) qui figurent dans l'énoncé du théorème de M. Bricard sont égales, le complexe est le *complexe des droites équidistantes de deux points.*

Les côtés opposés AD et BC du quadrilatère articulé circonscriptible à une infinité de sphères sont alors égaux.

Le complexe Ω *des droites équidistantes de deux points* A, B *est identique au complexe des droites sur lesquelles les projections d'un point fixe* (milieu O de AB) *sont dans un plan.* Il appartient à ce titre à une classe importante de complexes admettant une surface podaire que j'aurai l'occasion d'étudier dans un Mémoire *Sur les surfaces de M. Appell.*

Le complexe Ω est le même si l'on remplace A et B par les extrémités d'un autre segment de même direction et de même milieu.

Le complexe Ω est celui des sécantes d'une sphère ayant leurs milieux dans un plan diamétral donné : c'est bien là une dégénérescence du complexe de Battaglini.

En prenant O pour origine et AB sur Oz, l'équation du complexe Ω est

$$p_2 p_4 - p_1 p_5 = 0;$$

le complexe est donc un cas particulier (ellipsoïde de révolution) du complexe

$$a^2 p_2 p_4 - b^2 p_1 p_5 = 0$$

des cordes de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

ayant leurs milieux dans le plan principal Oxy (Amigues); c'est encore là une nouvelle dégénérescence du complexe de Battaglini.

Le complexe Ω, étant un complexe de Battaglini et étant son propre polaire réciproque par rapport à toute sphère de centrè O, est un complexe d'Aschieri.

Le cône du complexe Ω ayant pour sommet un point quelconque M de l'espace admet pour sections cycliques les plans normaux à la génératrice OM et à la génératrice parallèle à Oz.

La courbe du complexe située dans un plan quelconque est une parabole d'éléments immédiatement connus.

La surface du complexe correspondant à une droite quelconque de Oxy est un cylindre parabolique.

Je terminerai l'énumération des propriétés du complexe Ω en rappelant que je l'ai considéré à la page 256 des *Nouvelles Annales* de 1909 comme transformé du complexe linéaire spécial. Ce même complexe Ω a été étudié par Eck dans son Mémoire : *Ueber die Vertheilung der Axen von Rotation Flächen* 2 *grades* *welche durch gegebene Punckte gehen* (Dissertation von Münster, 1890) et par Sturm à la page 364 du Tome I de son Ouvrage : *Die gebilde* I *und* II *Grades der Liniengeometrie.*

9. Tandis que le premier théorème de M. Bricard conduit à la solution du problème de Transon pour le complexe de Painvin général, le second théorème ne permet pas de résoudre ce même problème pour le complexe de Painvin dégénéré : la congruence des tangentes communes à deux sphères n'est pas une congruence de normales. Mais, ce complexe étant de révolution, le problème est résoluble *a priori.*

Je m'occuperai uniquement du complexe Ω des droites équidistantes de deux points : on connaît alors une famille de surfaces non parallèles (cylindres de révolution autour de droites du plan Oxy issues de O) dont les normales appartiennent au complexe. Dès lors le problème est résoluble sans quadrature, d'après le théorème fondamental de M. Darboux.

Effectuons une transformation de contact : prenons les podaires par rapport à O. La podaire d'un cylindre d'axe passant par O et situé dans Oxy est un cercle de centre O et de diamètre Oz. *La surface* (Σ) *la plus générale, dont les normales appartiennent au complexe* Ω, *est antipodaire par rapport à* O *de la surface cerclée la plus générale* (S) *engendrée par un cercle de centre* O *et de diamètre* Oz. En d'autres termes, (S) est la transformée apsidale par rapport à O d'une courbe générale du plan Oxy.

Ce théorème est d'ailleurs un cas particulier du théorème suivant : *La surface la plus générale dont les normales appartiennent au complexe des droites sur lesquelles le point fixe* O *se projette en les points* *d'un cône de sommet O est antipodaire par rapport à O de la surface transformée apsidale par rapport à O d'une courbe quelconque tracée sur le cône.*

10. Signalons quelques propriétés des surfaces (Σ) et (S).

La surface (Σ) la plus générale est enveloppe du plan

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi,$$

ϖ n'étant fonction que de ψ.

Les lignes de niveau de (Σ) et celles de sa podaire (S) se correspondent : en général, la cote d'un point d'une surface définie en coordonnées φ et ψ est

$$z = \varpi \sin\varphi + \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} \cos\varphi;$$

pour une surface (Σ), z se réduit à $\varpi \sin\varphi$, c'est-à-dire à la cote du point correspondant de la podaire (S).

Sur la podaire (S), les cercles (ψ) et les courbes (tracées sur des cônes de révolution autour de Oz) correspondant aux courbes (φ) de (Σ) sont orthogonaux. Il est évident *a priori* que les courbes trajectoires orthogonales sur (S) des cercles générateurs sont déterminables, puisque l'axe Oz et la trace de (S) sur Oxy sont solutions doubles de l'équation de Riccati dont dépendent ces trajectoires. Il résulte de l'expression de l'élément linéaire de la surface podaire d'une surface quelconque

$$ds_1^2 = \left[\varpi^2 + \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\right)^2\right] d\varphi^2 + 2\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varpi}{\partial\psi} d\varphi\, d\psi + \left[\varpi^2\cos^2\varphi + \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\psi}\right)^2\right] d\psi^2,$$

que ces trajectoires orthogonales sont les courbes (φ) :

c'est là une propriété caractéristique des surfaces (S) et des surfaces de révolution autour de Oz. *Les projections sur* Oxy *des trajectoires orthogonales des cercles générateurs de la surface* (S) *sont homothétiques par rapport à* O *de la trace de* (S) *sur* Oxy. Cette trace n'est autre d'ailleurs que la courbe transformée apsidale de (S), après rotation d'un angle droit autour de Oz ([1]).

11. Après avoir indiqué ces quelques propriétés générales, je donnerai quelques exemples de surfaces cerclées (S).

I. Une surface (S) classique (qui donna d'ailleurs lieu à diverses questions des *Nouvelles Annales*) est la surface engendrée par les sections circulaires diamétrales d'une famille d'ellipsoïdes homofocaux.

D'une façon générale, toute surface (S) peut être envisagée comme lieu des sections circulaires diamétrales d'une famille à un paramètre de quadriques

---

([1]) Nous venons de déterminer les surfaces telles que les courbes (φ) et (ψ) sont orthogonales sur la podaire. Signalons incidemment que *les surfaces* (Π) *telles que les courbes* (φ) *et* (ψ) *soient conjuguées sur la podaire* sont intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\varpi\left(\frac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi\,\partial\psi}+\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\operatorname{tang}\varphi\right)-2\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varpi}{\partial\psi}=0.$$

La transformation $\varpi\varpi'=1$ (du groupe que j'ai considéré à la page 311 des *Nouvelles Annales*, de 1909) *transforme ces surfaces* (Π) *en les surfaces moulures*

$$\frac{\partial^2\varpi'}{\partial\varphi\,\partial\psi}+\frac{\partial\varpi'}{\partial\psi}\operatorname{tang}\varphi=0;$$

on a donc

$$\varpi(\Phi+\Psi\cos\varphi)=1,$$

Φ désignant une fonction arbitraire de φ, et Ψ une fonction arbitraire de ψ.

coaxiales; lorsque c'est la famille homofocale

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0 \qquad (a^2>c^2>b^2),$$

la surface (S) a pour équation en coordonnées elliptiques

$$\lambda_2+\lambda_3=-(a^2+b^2),$$

et en coordonnées cartésiennes

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{c^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-c^2}\right)=x^2+y^2;$$

c'est une dégénérescence de la surface des ondes de Fresnel; elle est transformée apsidale, par rapport à son centre, de l'hyperbole focale du faisceau.

II. La surface (S) transformée apsidale de la spirale d'Archimède de pôle O est la podaire de la surface (Σ) d'équation

$$\varpi=a\psi;$$

cette surface (Σ) est une surface de M. Appell que j'ai déjà considérée dans une Note sur l'*Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies* (¹).

III. La surface (S) d'équation

$$(x^2+y^2+z^2)x^2=c^2(x^2+y^2)$$

est une dégénérescence de la surface des ondes de Fresnel; elle est transformée apsidale d'une droite. Elle est engendrée par des courbes qui se projettent sur Oyz suivant des ellipses homofocales.

Si le plan Oyz est supposé horizontal, les lignes de plus grande pente de cette surface sont les cercles gé-

---

(¹) *Nouvelles Annales*, même Tome, p. 24.

nérateurs. On connaît donc un réseau orthogonal tracé sur cette surface et formé de deux systèmes de coniques.

IV. La surface (S) d'équation

$$(x^2+y^2+z^2)^2y^2 = c^4(x^2+y^2)$$

est engendrée par des cercles qui se projettent sur Oyz suivant des ellipses d'aire constante; elle est transformée apsidale de la courbe d'équation polaire

$$r^2 \cos\theta = c^2;$$

les trajectoires orthogonales des cercles générateurs se projettent orthogonalement sur Oxy suivant les courbes

$$r^2 \sin\theta = \text{const.};$$

ces courbes sont inverses d'une courbe remarquable qu'on rencontre fréquemment : projection des asymptotiques du conoïde de Wallis; hodographe du pendule simple, dans un cas particulier; méridienne du solide de moindre attraction; méridiennes des surfaces équipotentielles des doublets, etc. (¹).

V. Comme dernier exemple de surface (S), je signalerai le suivant : si quatre cercles de centres fixes, de rayons variables, les différences des rayons deux à deux étant constantes, sont assujettis à être quatre cercles d'une même sphère (sphère qui dès lors engendre un faisceau), chacun de ces quatre cercles engendre une surface (S) particulière.

12. Le complexe Ω appartient à *une classe impor-*

(¹) On trouvera les courbes $r^2 = b^2\cos\theta$ et leurs trajectoires orthogonales $r = a\sin^2\theta$ représentées à la figure 37 (p. 45) du *Traite de Mécanique rationnelle* de M. H. Bouasse.

tante de complexes pour lesquels le problème de Transon se résout par trois quadratures.

Considérons un complexe dont l'équation est linéaire et homogène en p_4, p_5, p_6, les coefficients étant trois fonctions homogènes et de même degré de $\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$ et de chacune des trois coordonnées respectives p_1, p_2, p_3; en d'autres termes, cette équation est, en tenant compte de la relation $p_1^2+p_2^2+p_3^2=1$,

$$P_1 p_4 + P_2 p_5 + P_3 p_6 = 0,$$

P_1, P_2, P_3 étant trois fonctions données respectivement de p_1, de p_2, de p_3.

L'équation linéaire dont dépendent, en coordonnées de Bonnet, les surfaces dont les normales appartiennent au complexe peut être mise sous la forme

$$\sum_1^3 P_i \frac{D(\varpi, p_i)}{D(u, v)} = 0$$

ou

$$\frac{D(\varpi, V)}{D(u, v)} = 0,$$

en posant

$$V = \int P_1\, dp_1 + \int P_2\, dp_2 + \int P_3\, dp_3;$$

toutes les surfaces cherchées sont données, par conséquent, par la formule

$$\Pi(\varpi) = \int P_1\, dp_1 + \int P_2\, dp_2 + \int P_3\, dp_3,$$

dans laquelle Π est une fonction arbitraire de ϖ.

En prenant pour P_1, P_2, P_3 trois dérivées de fonctions connues, le problème se résout sans quadrature. Un premier exemple est celui du complexe Ω,

$$P_1 = \frac{1}{p_1}, \qquad P_2 = -\frac{1}{p_2}, \qquad P_3 = 0, \qquad \varpi = f\left(\frac{u}{v}\right),$$

et du complexe plus général (n° 8) des cordes d'un ellipsoïde dont les milieux sont dans un plan principal

$$P_1 = \frac{a^2}{p_1}, \qquad P_2 = -\frac{b^2}{p_2}, \qquad P_3 = 0, \qquad \varpi = f\left(\frac{p_1^{a^2}}{p_2^{b^2}}\right);$$

cette classe importante de complexes contient le complexe des droites rencontrant une droite issue de O, le complexe tétraédral, le complexe polaire réciproque, par rapport à une sphère de centre O, du complexe des génératrices des quadriques homofocales et homothétiques, etc.

P.-S. — Dans cette Note, je me suis préoccupé d'exposer quelques conséquences des deux théorèmes si simples et si curieux de M. Bricard. Je publierai prochainement un ensemble de recherches sur le problème de Transon ; je montrerai comment un théorème de M. Darboux, théorème dont Sophus Lie a indiqué des applications, conduit à diverses méthodes nouvelles pour déterminer les congruences de normales appartenant à un complexe donné.