NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Construction du centre de courbure en un point d'une strophoïde

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 361-363

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__361_1>

[M[1]5cα]

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE STROPHOÏDE;

PAR M. R. BOUVAIST.

L'équation d'une strophoïde quelconque rapportée

---

(1) Son équation est

$$\frac{P_1 P_2}{4}\left(1+\frac{1}{K^2}\right)^2-\left[1-\frac{P_1+P_2}{4}\left(1-\frac{1}{K^2}\right)^2\right]=0,$$

où P_1 est le premier membre de l'équation du premier cylindre (ou, plus exactement, l'ensemble des deux génératrices contenues dans le plan du tableau) écrite de manière qu'on ait $P_1 = -1$ sur l'axe; soit $P_1 = 1 - \frac{(x-az)^2}{V^2}$ si l'on a pris pour axes les diagonales du losange formé par ces génératrices et les génératrices correspondantes du second cylindre; P_2, la quantité analogue pour le second cylindre.

(2) Il est à remarquer que cette même courbe est celle qui intervient (par une autre de ses portions, il est vrai) lorsqu'on traite le problème des nos 5-8 en supposant le mouvement des B assujetti à être rectiligne et uniforme, avec une vitesse toujours égale à $\frac{1}{b}$.

a un triangle de référence ABC, le point double de la courbe étant en A, les tangentes en ce point étant les bissectrices de l'angle A et la courbe passant par B et C, est

$$x(z^2-y^2)-2yz(y\cos B-z\cos C)=0.$$

Les tangentes en B et C ont respectivement pour équation

$$x+2z\cos B=0,$$
$$x+2y\cos C=0;$$

ce sont les symétriques du côté BC par rapport à AB et AC.

Le rayon de courbure en un point (α, β, γ) d'une courbe $f(x, y, z)=0$ rapportée à un triangle de référence ABC est donné par la formule

$$\rho=(p-1)^2\frac{R^2}{S^2}\frac{P^{\frac{3}{2}}}{H},$$

p étant le degré de la courbe, R le rayon du cercle circonscrit au triangle de référence, S la surface de ce triangle,

$$\begin{aligned}P=f_\alpha'^2+f_\beta'^2+f_\gamma'^2-2f_\beta' f_\gamma'\cos A\\ -2f_\gamma' f_\alpha'\cos B\\ -2f_\alpha' f_\beta'\cos C,\end{aligned}$$

$$H=\begin{vmatrix} f''^2_{\alpha^2} & f''^2_{\alpha\beta} & f''^2_{\alpha\gamma}\\ f''^2_{\alpha\beta} & f''^2_{\beta^2} & f''^2_{\beta\gamma}\\ f''^2_{\alpha\gamma} & f''^2_{\beta\gamma} & f''^2_{\gamma^2}\end{vmatrix},$$

formule qui, appliquée au point B, donne

$$\rho_1=\frac{R^2}{4S^2}\frac{h_b^3}{\cos C},$$

h_b étant la hauteur du triangle ABC issue du sommet B;

on a aussi

$$\rho_1 = \frac{R^2}{4S^2}\frac{h_b^3}{\cos C} = \frac{h_b}{4\sin^2 B \cos C}.$$

De cette formule on déduit immédiatement la construction suivante : pour obtenir le centre de courbure en un point M d'une strophoïde quelconque de point double O, on détermine le point M′ de la courbe situé sur la droite OM′, symétrique de OM par rapport aux tangentes au point double; sur OM′, on porte à partir de M′ une longueur M′α égale au quart de la distance de M à OM′; la perpendiculaire à OM′ en α coupe MM′ en β; sur la perpendiculaire en M à M′M, on porte $M\gamma = M'\beta$; la parallèle à MM′ menée par γ coupe OM en δ; on porte sur $M\gamma$, $M\varepsilon = M\delta$; la parallèle à MM′ menée par ε coupe MO en η, $M\eta$ est le rayon de courbure en M. La tangente en M est d'ailleurs la symétrique de MM′ par rapport à MO.

Remarque. — Au point B on a

$$\rho_1 = \frac{h_b}{4\sin^2 B \cos C},$$

en C on a de même

$$\rho_2 = \frac{h_c}{4\sin^2 C \cos B},$$

d'où la formule

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{c^3 \cos B}{b^3 \cos C},$$

donnant le rapport des rayons de courbure en deux points conjugués.