Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 183-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__183_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2084.

(1907, p. 327.)

Étant donnés un tétraèdre orthocentrique ABCD *et un point* M *de la sphère circonscrite, les parallèles à* MA, MB, MC, MD *menées par l'orthocentre* H *rencontrent les plans des faces correspondantes en quatre points situés dans un même plan et ce plan partage le segment* MH *dans le rapport de* 2 *à* 1. G. FONTENÉ.

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

Prenons l'orthocentre du tétraèdre donné comme origine d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires.

Soient

$$x^2+y^2+z^2-\rho^2=0$$

la sphère conjuguée au tétraèdre et

$$x\cos\alpha_i+y\cos\beta_i+z\cos\gamma_i-p_i=0 \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

les faces de celui-ci.

Les coordonnées des sommets seront

$$x=\rho^2\frac{\cos\alpha_i}{p_i}, \qquad y=\rho^2\frac{\cos\beta_i}{p_i}, \qquad z=\rho^2\frac{\cos\gamma_i}{p_i},$$

et la sphère circonscrite aura pour équation

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-x\rho^2\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}\\ -y\rho^2\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}-z\rho^2\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}+3\rho^2=0.\end{aligned}$$

La quadrique de révolution polaire réciproque de cette sphère par rapport à la sphère conjuguée sera

$$\rho^2(u^2+v^2+w^2)$$
$$+s\left[\rho^2\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}u+\rho^2\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}v+\rho^2\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}w+3s\right]=0.$$

Soit

$$ux+vy+wz+s=0$$

un plan tangent à cette quadrique.

Menons par chaque sommet du tétraèdre des plans parallèles aux plans déterminés par l'orthocentre et l'intersection de ce plan tangent avec la face opposée. Ces plans ont pour équations

$$(1)\quad x[p_i u+s\cos\alpha_i]+y[p_i v+s\cos\beta_i]+z[p_i w+s\cos\gamma_i]$$
$$=\rho^2\left[u\cos\alpha_i+v\cos\beta_i+w\cos\gamma_i+\frac{s}{p_i}\right].$$

Considérons maintenant le point M de coordonnées

$$x=\rho^2\frac{u}{s}+\rho^2\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i},\qquad y=\rho^2\frac{v}{s}+\rho^2\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i},$$
$$z=\rho^2\frac{w}{s}+\rho^2\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i};$$

ce point est le point d'intersection des quatre plans (1). Substituons en effet les coordonnées de ce point dans l'équation du plan $i=1$, il vient

$$\left(\frac{u}{s}+\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}\right)(p_1u+s\cos\alpha_1)$$
$$+\left(\frac{v}{s}+\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}\right)(p_1v+s\cos\beta_1)$$
$$+\left(\frac{w}{s}+\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}\right)(p_1w+s\cos\gamma_1)$$
$$=\left(u\cos\alpha_1+v\cos\beta_1+w\cos\gamma_1+\frac{s}{p_1}\right);$$

d'où

$$p_1\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{s}+u\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}+v\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}+w\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}\right]$$
$$+u\cos\alpha_1+v\cos\beta_1+w\cos\gamma_1$$
$$+s\left[\frac{\cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2}{p_1}\right.$$
$$+\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{p_2}$$
$$+\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3}{p_3}$$
$$\left.+\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_4+\cos\beta_1\cos\beta_4+\cos\gamma_1\cos\gamma_4}{p_4}\right]$$
$$=\left[u\cos\alpha_1+v\cos\beta_1+w\cos\gamma_1+\frac{s}{p_1}\right],$$

Or

$$\cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2=1$$

et

$$\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{p_2}$$
$$=\frac{p_1}{\rho_2}=\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3}{p_3}$$
$$=\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_4+\cos\beta_1\cos\beta_4+\cos\gamma_1\cos\gamma_4}{p_4},$$

ces conditions expriment en effet que le sommet $i=1$ est dans les plans

$$x\cos\alpha_i+y\cos\beta_i+z\cos\gamma_i-p_i=0 \qquad (i=2,3,4);$$

d'où finalement

$$\rho^2(u^2+v^2+w^2)$$
$$+s\left[u\rho^2\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}+v\rho^2\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}+w\rho^2\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}+3s\right]=0,$$

condition vérifiée puisque le plan

$$ux+vy+wz+s=0$$

est tangent à la quadrique dont l'équation est la précédente.

On vérifie de même que le point considéré est sur la sphère circonscrite au tétraèdre et sur le plan

$$ux + vy + wz + 3s = 0,$$

Or si P est la projection de l'origine sur le plan

$$ux + vy + wz + s = 0$$

le plan

$$ux + vy + wz + 3s = 0$$

est le plan parallèle au précédent mené par le point P, tel que $\frac{\mathrm{HP}_1}{\mathrm{HP}} = 3$; il en résulte donc que la droite HM est partagée par le plan

$$ux + vy + wz + s = 0$$

dans le rapport de 2 à 1, ce qui démontre la proposition.

Remarque. — Le point M de coordonnées

$$x = \rho^2 \frac{u}{s} + \rho^2 \frac{\Sigma \cos\alpha_i}{p_i}, \qquad y = \rho^2 \frac{v}{s} + \rho^2 \frac{\Sigma \cos\beta_i}{p_i},$$
$$z = \rho^2 \frac{w}{s} + \rho^2 \frac{\Sigma \cos\gamma_i}{p_i},$$

est le point de la sphère ABCD diamétralement opposé au pôle du plan $ux + vy + wz + h = 0$ par rapport à la sphère conjuguée, ce qui permet de compléter l'énoncé de la façon suivante :

Étant donnés un tétraèdre orthocentrique ABCD *et un point* M *de la sphère circonscrite, les parallèles à* MA, MB, MC, MD *menées par l'orthocentre* H *rencontrent les plans des faces correspondantes en quatre points situés dans le plan polaire du point* M' *diamétralement opposé au point* M *dans la sphère* ABCD, *par rapport à la sphère conjuguée au tétraèdre et ce plan partage le segment* MH *dans le rapport de deux à un.*

2144.

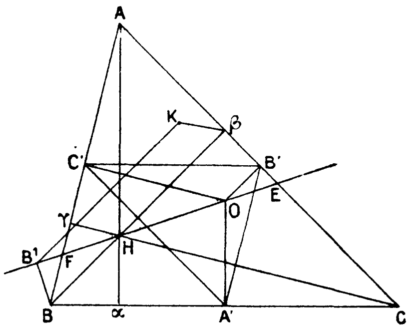
(1910, p. 95.)

La droite d'Euler d'un triangle ABC (*droite qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit*) *coupe les* *côtés aux points* D, E, F. *Les trois cercles de diamètres respectifs* AD, BE, CF *ont en commun un point* K *qui appartient au cercle des neuf points du triangle. Démontrer que la distance du point* K *au pied de l'une des hauteurs est égale à la somme de ses distances au pied des deux autres hauteurs.* V. Thébault.

Solution,

Par M. R. B. [1].

Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit à ce triangle, H son orthocentre. L'orthocentre du triangle A′B′C′ est sur la droite OH, puisque les deux triangles ABC, A′B′C′ sont homothétiques



par rapport à leur centre de gravité commun qui est sur la droite OH. Il existe donc une parabole (P) inscrite dans le triangle A′B′C′ et ayant pour directrice la droite OH. Soit K le foyer de cette parabole.

Le triangle ABC, étant le triangle diagonal du quadrilatère circonscrit à (P) dont les côtés sont B′C′, C′A′, A′B′ et la droite de l'infini, est conjugué par rapport à la parabole.

Soit E le point de rencontre de la droite d'Euler OH avec CA. Le point E est à la fois sur la polaire de K et sur la polaire de B par rapport à (P). Le point E a donc pour

[1] Les éléments de cette solution sont empruntés à celles que nous ont adressées MM. R. Bouvaist et L. Klug.

polaire BK; KE est par suite perpendiculaire à BK, en vertu d'une propriété bien connue de la parabole. Autrement dit, le point K appartient au cercle de diamètre BE. Il appartient de même aux cercles analogues, de diamètres AD et CF. Comme le point K appartient au cercle circonscrit à A'B'C', c'est-à-dire au cercle des neuf points du triangle ABC, la première partie de la proposition est établie.

Soit maintenant B_1 la projection de B sur OH. La droite BB_1 étant parallèle à l'axe de (P), la polaire du point B_1 est parallèle à celle du point B : c'est donc la symétrique du point B_1 par rapport à C'A'. D'autre part, cette polaire doit passer par le foyer K, puisque B_1 est sur la directrice. On voit donc, en appelant β le pied de la hauteur issue du point B_1, que le trapèze $BB_1K\beta$ est isoscèle, son axe de symétrie étant C'A'. En particulier, on a

$$K\beta = BB_1.$$

On a de même, avec des notations analogues,

$$K\alpha = AA_1, \qquad K\gamma = CC_1.$$

Mais, comme la droite OH passe par le centre de gravité du triangle ABC, l'une des distances AA_1, BB_1, CC_1 est égale à la somme des deux autres. On a donc la même relation entre les trois longueurs $K\alpha$, $K\beta$, $K\gamma$. C. Q. F. D.

Comme on l'a dit plus haut, MM. R. Bouvaist et L. Klug nous ont adressé deux solutions. Le premier introduit la considération de la parabole (P). Mais la remarque que $K\alpha = AA_1, \ldots$ est due à M. Klug.

2149.

(1910, p. 144.)

On considère un point P *situé sur une normale à une ellipse donnée en un point* M *variable et partageant le rayon de courbure* MC *en deux parties ayant un rapport donné. Montrer que l'aire de la courbe lieu du point* P *est une fonction donnée des aires de l'ellipse et de sa développée.*

E.-N. Barisien.

SOLUTION,

Par M. Thié.

La propriété reste vraie si l'on remplace l'ellipse par une courbe fermée quelconque.

Je désignerai par (M), (C) et (P) les aires respectives des courbes décrites par les points M, C, P.

Soient x, y les coordonnées du point M, R le rayon de courbure en M. Les coordonnées du point C sont, avec les notations ordinaires,

$$X = x - R\frac{dy}{ds}, \qquad Y = y + R\frac{dx}{ds}.$$

Celles du point P sont

$$\xi = \frac{x + kX}{1 + k}, \qquad \eta = \frac{y + kY}{1 + k},$$

k étant une constante. On a donc

$$(P) = \int \eta\, d\xi = \frac{1}{(1+k)^2}\int (y + kY)(dx + k\, dX),$$

l'intégrale du dernier membre pouvant être considérée comme une intégrale curviligne étendue à la courbe fermée décrite par le point M, après qu'on y a remplacé X et Y par leurs valeurs en fonction de x, y. On trouve, en développant,

$$\begin{aligned}(P) &= \frac{1}{(1+k)^2}\int y\, dx + \frac{k^2}{(1+k)^2}\int Y\, dx \\ &\quad + \frac{k}{(1+k)^2}\int y\, dX + Y\, dx \\ &= \frac{1}{(1+k)^2}(M) + \frac{k^2}{(1+k)^2}(C) + \frac{k}{(1+k)^2}\int y\, dX + Y\, dx.\end{aligned}$$

Considérons la dernière intégrale

$$I = \int y\, dX + Y\, dx;$$

on a

$$I = \int y\, dX + \int Y\, dx,$$

puis, en effectuant une intégration par parties dans la seconde intégrale,

$$\int Y\, dx = Yx - \int x\, dY.$$

Le terme intégré Yx reprend la même valeur à la fin et au début du circuit d'intégration, on a donc simplement

$$\int Y\, dx = - \int x\, dY,$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \int y\, dX - x\, dY \\ &= \int Y\, dX - X\, dY + \int (y - Y)\, dX - (x - X)\, dY; \end{aligned}$$

mais on a

$$(y - Y)\, dX - (x - X)\, dY = 0;$$

ceci exprime en effet que la tangente au point C passe par le point M. Il reste

$$I = \int Y\, dX - X\, dY = 2(C).$$

On trouve donc finalement

$$(P) = \frac{1}{(1+k)^2}(M) + \frac{k^2 + 2k}{(1+k)^2}(C),$$

ce qui établit la proposition.

Autre solution par M. R. BOUVAIST.

2150.

On considère tous les triangles circonscrits à une parabole P *et tels que les normales aux points de contact soient concourantes. Montrer que :*

1° *Les perpendiculaires élevées aux côtés de ce triangle* *en leurs milieux (médiatrices) sont normales à une parabole fixe* P'.

2° *Les milieux des côtés de ces triangles sont situés sur une parabole* P''.

E.-N. Barisien.

SOLUTION,

Par M. R. Bouvaist.

Soit

$$x = \frac{t^2}{2p}, \qquad y = t,$$

la parabole P, si les normales en trois points t_1, t_2, t_3 sont concourantes

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0.$$

La tangente au point t a pour équation

$$T = y - t - \frac{p}{t}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) = 0,$$

le point $T_1 T_2$ a pour coordonnées

$$x = \frac{t_1 t_2}{2p}, \qquad y = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

le point $T_1 T_3$

$$x = \frac{t_1 t_3}{2p}, \qquad y = \frac{t_1 + t_3}{2};$$

les coordonnées du milieu M du segment joignant ces deux points seront

$$x = \frac{t_1(t_2 + t_3)}{4p} = -\frac{t_1^2}{4p},$$

$$y = \frac{2t_1 + t_2 + t_3}{4} = \frac{t_1}{4};$$

ce point décrit la parabole

$$4y^2 + px = 0.$$

La perpendiculaire en M à la tangente T_1 sera

$$y - \frac{t_1}{4} + \frac{t_1}{p}\left(x + \frac{t_1^2}{4p}\right) = 0,$$

elle enveloppe la développée de parabole

$$(4x - p)^3 + 108py^2 = 0.$$

2153.

(1910, p. 240.)

La normale en un point M *d'une ellipse de centre* O *rencontre le grand axe en* N. *La parallèle à* OM *menée par* N *est normale à une ellipse fixe, dont deux des sommets coïncident avec les sommets du petit axe de l'ellipse donnée.* E.-N. BARISIEN.

SOLUTION,

Par M. L. KLUG.

Abaissons du point M la perpendiculaire MQ sur le petit axe, et menons OP parallèle à NM. On a, avec les notations de la figure

$$\frac{QP}{QM} = \frac{QO}{QL} = \frac{MN}{ML} = \text{const.},$$

donc le point P décrit une ellipse ayant mêmes sommets du petit axe que la proposée. Il en est de même du point P′, symétrique du point P par rapport au point O. La tangente en P est la droite PT, perpendiculaire à OM, car P est l'orthocentre du triangle OMT. La tangente en P′ est parallèle à PT, donc la normale en P′ n'est autre que la droite P′N, ce qui démontre la proposition énoncée.

Autres solutions par MM. BOUVAIST et LEZ.