NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. KERAVAL

Surfaces engendrées par le déplacement d'une courbe plane indéformable, de telle sorte qu'il existe un cône circonscrit le long de la courbe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 481-498

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__481_0>

[O'5n]

SURFACES ENGENDRÉES PAR LE DÉPLACEMENT D'UNE COURBE PLANE INDÉFORMABLE, DE TELLE SORTE QU'IL EXISTE UN CONE CIRCONSCRIT LE LONG DE LA COURBE;

Par M. E. KERAVAL,
Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

On connaît la thèse de M. E. Blutel sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. On pourra la consulter dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 1890. Pour abréger je désignerai par surface Σ toute surface engendrée par le déplacement d'une courbe plane lorsqu'il existe un cône ou comme cas limite un cylindre circonscrit à la surface le long de chaque courbe plane.

I. — Surfaces Σ de révolution de degré quatre.

Je laisserai de côté le cas où la courbe qui tourne est la méridienne; il est clair que de cette façon-là toute surface de révolution est une surface Σ.

Je vais d'abord considérer le cas où la courbe dont la révolution engendre la surface Σ est une conique. Prenons trois axes rectangulaires et soient

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

les équations d'une ellipse que je fais tourner autour d'une droite

$$x = x_0 + \lambda z, \qquad y = y_0 + \mu z.$$

En écrivant que le plan tangent au point

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi, \qquad z = 0$$

passe par le point S de coordonnées α, β, γ, j'obtiens cinq équations; trois d'entre elles me donnent α, β, γ :

$$\alpha = \frac{\lambda y_0 - \mu x_0}{\mu},$$

$$\beta = \frac{\lambda y_0 - \mu x_0}{-\lambda},$$

$$\gamma = \frac{(\lambda y_0 - \mu x_0)(a^2\mu^2 + b^2\lambda^2)}{c^2\lambda\mu},$$

où

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Il reste deux autres équations qu'on peut écrire en posant $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$:

$$(1)\quad \begin{cases} b^2x_0y_0\rho^3 - (b^2x_0^2 - c^2y_0^2 + b^2c^2)\rho^2 \\ \qquad + (b^2 - c^2)x_0y_0\rho - b^2x_0^2 = 0, \\ a^2y_0^2\rho^3 - (a^2 + c^2)x_0y_0\rho^2 \\ \qquad + (c^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2c^2)\rho - a^2x_0y_0 = 0. \end{cases}$$

Or entre ces deux équations on peut éliminer en même temps le terme en ρ^3 et le terme indépendant de ρ; on trouve ainsi

$$(\rho y_0 - x_0)(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2) = 0.$$

L'hypothèse $\rho = \frac{x_0}{y_0}$ conduit à ρ et x_0 nuls donc aux quadriques. Je laisse ce cas de côté, il reste alors

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

c'est-à-dire que le pied de l'axe de rotation doit être sur la conique. Posons alors

$$x_0 = a\cos\varphi, \qquad y_0 = b\sin\varphi;$$

les deux équations se réduisent à

$$(2)\qquad \begin{aligned} &ab^2\sin\varphi\cos\varphi\rho^3 - b(a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi)\rho^2 \\ &\quad + a(b^2 - c^2)\sin\varphi\cos\varphi\rho - a^2b\cos^2\varphi = 0. \end{aligned}$$

Si l'on remplace $\frac{1}{\rho}$ par m on trouve que (2) est l'équation aux coefficients angulaires des normales abaissées du point x_0y_0 sur la conique quand on a supprimé la normale dont le point d'incidence est x_0y_0.

Ces résultats étaient à peu près évidents d'après le théorème de M. Blutel qui dit que la conique doit rouler sur deux courbes. Ici l'une des courbes est réduite à un point, l'autre est une circonférence.

Soit S' la projection du sommet du cône sur le plan de la conique. Il existe une construction simple de ce point S'. Soit Δ' la projection de l'axe de révolution Δ sur le plan de la conique. Δ' coupe Ox en P, Oy en Q; achevons le rectangle OPS_1Q. Le symétrique du point S_1 ainsi déterminé par rapport au point O donne le point S' cherché. Ceci est facile à vérifier sur les formules qui donnent α, β. On peut donner une autre construction. Soient α', β' les coordonnées du pôle de Δ' par rapport à la conique

$$\alpha' = \frac{-a^2\mu}{\lambda y_0 - \mu x_0} = \frac{-a^2}{\alpha},$$
$$\beta' = \frac{b^2\lambda}{\lambda y_0 - \mu x_0} = \frac{-b^2}{\beta}.$$

On reconnaît les formules de Desboves. Donc :

Théorème. — *On obtient les surfaces Σ engendrées par la rotation d'une conique en menant le plan* *normal* P *à cette conique en un point* A *pris sur elle. Ce plan coupe la conique en un deuxième point* B. *L'axe de rotation* Δ *est une droite quelconque de* P *passant par* B. *Pour avoir la projection* S′ *du sommet* S *du cône sur le plan de la conique*, *on mène par* B *les deux normales autres que* BA : BA′ *et* BA″; *alors* S′ *est le pôle de* A′A″. Sur ces surfaces il existe évidemment deux séries de génératrices coniques, car on peut remplacer la conique choisie par la conique située dans le même plan et symétrique de la première par rapport à AB. Comme AB est normale, ces deux coniques sont osculatrices et il en résulte que le cercle double est un cercle de rebroussement. Par homographie on obtient des surfaces Σ du quatrième degré *avec une conique de rebroussement* et un point conique. Dans le cas de la parabole on peut procéder de même, mais alors le cône circonscrit devient un cylindre; on peut aussi prendre A à l'infini. Dans ce cas on doit prendre un point B sur la parabole et par B mener le plan P perpendiculaire au plan de la parabole et parallèle à son axe. L'axe Δ est une droite quelconque de P passant par B.

Généralisation. — On peut se servir des résultats précédents chaque fois que, pour le mouvement du solide lié à la conique, il existe une rotation tangente. Par exemple, comme cas très particulier :

On aura une surface Σ *en faisant rouler le plan* P *supposé lié à la conique sur un cône absolument quelconque ayant son sommet en* B.

Pour réaliser le cas général de la rotation tangente, il faudrait d'abord construire une surface réglée engendrée par le déplacement d'une droite qui rencontrerait la conique en restant tangente au cylindre droit ayant pour base la développée. On ferait ensuite *virer* sans glissement cette surface sur une deuxième surface applicable sur la première.

Lignes asymptotiques.

Lorsqu'on fait tourner une conique autour d'un axe quelconque la détermination des lignes asymptotiques de la surface conduit à une quadrature hyperelliptique. Je vais faire voir que dans le cas particulier d'une surface Σ de révolution on trouve une intégrale elliptique. Soient

$$\text{(C)} \qquad z = my, \qquad x^2 = (ax + by)(y - c)$$

les équations de la conique (C) qui tourne autour de Oz. Je vais chercher suivant quelle loi un mobile doit se déplacer sur cette courbe pour que l'accélération soit dans le plan tangent. J'imagine que le trièdre $Oxyz$ tourne avec la courbe. En posant $y = \lambda x$ les équations (C) peuvent être remplacées par les équations suivantes :

$$x = \frac{c(a - b\lambda)}{\Delta},$$

$$y = \frac{c\lambda(a + b\lambda)}{\Delta} \qquad (\Delta = b\lambda^2 + a\lambda - 1).$$

$$z = \frac{mc\lambda(a + b\lambda)}{\Delta}$$

Si les axes tournent d'un angle φ autour de Oz, on aura, en appelant X, Y, Z les coordonnées dans le système fixe

$$X = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad Y = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \qquad Z = z.$$

En dérivant deux fois par rapport au temps on aura les composants de l'accélération par rapport aux axes fixes d'où facilement par rapport aux axes mobiles. Ces composantes seront, si l'on prend $\varphi = t$,

$$x'' - 2y' - x, \quad y'' + 2x' - y, \quad z'',$$

les accents désignant des dérivations par rapport à t. L'équation des lignes asymptotiques est donc

$$\begin{vmatrix} x'' + 2y' - x & y'' + 2x' - y & z'' \\ x' & y' & z' \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$2b^2\lambda'^2 + 2(a + b\lambda)(a + 2b\lambda)\lambda' \\ + (a + b\lambda)(a + 2b\lambda)(1 + \lambda^2) = 0.$$

Si l'on tire λ', la quantité sous le radical a pour valeur

$$R = (a + b\lambda)(a + 2b\lambda)[3ab\lambda + (a^2 - 2b^2)],$$

ce qui démontre la proposition. Les valeurs de λ qui annulent R correspondent : $\lambda = -\frac{a}{b}$ à l'origine, c'est-à-dire au point fixe de la conique ; $\lambda = -\frac{a}{2b}$ au point de la conique où la tangente est parallèle à Ox et qui ne se projette pas sur Oy (celui-là correspondrait à λ infini) ; enfin $\lambda = \frac{2b^2 - a^2}{3ab}$ correspond à un point A' de la conique différent de l'origine et tel que SA rencontre Oz. Il est facile de vérifier que le long de SA le plan tangent au cône est perpendiculaire au plan SA, Oz, de sorte que SA engendre un cône de révolution auquel sont tangents tous les cônes circonscrits le long des coniques. Il est bien facile de voir pourquoi cette valeur de λ doit intervenir dans la valeur de R. En effet, si l'on discute la réalité des lignes asymptotiques sur une surface de révolution, on voit qu'elle change quand on passe par un point d'inflexion de la méridienne ou encore lorsque l'angle du plan tangent à la surface avec l'axe de révolution passe par un maximum ou un minimum. Or ceci arrive évidemment lorsque se déplaçant sur la conique, on arrive en A à cause de la propriété du plan tangent au cône circonscrit le long de SA.

II. — Surfaces Σ de révolution dans le cas général.

Je fais tourner autour de Oz la courbe

$$(\mathrm{A}) \qquad z = \mu y, \qquad y = \mathrm{F}(x).$$

Il s'agit de déterminer la fonction F de telle sorte qu'il existe un cône circonscrit le long de la courbe. Si α, β, γ désignent les coordonnées du sommet S du cône, on devra avoir

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - y & \gamma - \mu y \\ 1 & y' & \mu y' \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une équation différentielle de Jacobi qu'on intègre facilement en posant

$$y = ux \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x} = v.$$

L'équation en u, v est linéaire en v; elle s'écrit

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + \mathrm{A}}{u^2 + \mathrm{A}u + \mathrm{B}} v + \frac{\mathrm{C}}{u^2 + \mathrm{A}u + \mathrm{B}},$$

où

$$\mathrm{A} = \frac{\alpha}{\beta - \delta}, \qquad \mathrm{B} = \frac{-\delta}{\beta - \delta}, \qquad \mathrm{C} = \frac{-1}{\beta - \delta}, \qquad \delta = \frac{\gamma}{\mu}.$$

Si u_1, u_2 sont les deux racines de

$$u^2 + \mathrm{A}u + \mathrm{B} = 0,$$

la résolution de l'équation sans second membre conduit à poser

$$v = V(u - u_1)^{\frac{u_2}{u_2 - u_1}} (u - u_2)^{\frac{u_1}{u_1 - u_2}},$$

et l'on a, pour déterminer V, l'équation

$$\frac{dV}{du} = C(u - u_1)^{\frac{2u_2 - u_1}{u_1 - u_2}} (u - u_2)^{\frac{2u_1 - u_2}{u_2 - u_1}},$$

ce qui donne V par une quadrature facile à effectuer parce que la somme des deux exposants

$$\frac{2u_2 - u_1}{u_1 - u_2} + \frac{2u_1 - u_2}{u_2 - u_1} = -3.$$

Effectivement on a

$$\begin{aligned} \int (u - u_1)^{\lambda} (u - u_2)^{-\lambda - 3}\, du \\ = \frac{1}{(u_2 - u_1)^2 (\lambda + 1)(\lambda + 2)} \left(\frac{u - u_1}{u - u_2}\right)^{\lambda + 1} \\ + \frac{1}{(u_1 - u_2)(\lambda + 2)} \frac{(u + u_1)^{\lambda + 1}}{(u - u_2)^{\lambda + 2}}. \end{aligned}$$

Finalement on trouve

$$\text{(B)} \qquad (y - ax)^m = K(y - bx)^{m-1}(y - h)$$

avec la condition

$$\frac{a}{b} = \frac{m - 1}{m},$$

qui donne la projection de la courbe sur xOy.

La condition

$$\frac{a}{b} = \frac{m - 1}{m}$$

exprime que cette courbe coupe Oy à angle droit. D'ailleurs les coordonnées du sommet du cône sont données par les formules, où $\rho = b - a$,

$$\frac{\alpha}{h} = \frac{2m - 1}{m(m - 1)\rho}, \qquad \frac{\beta}{h} = \frac{m(m - 1)\rho^2 + 1}{m(m - 1)\rho^2}, \qquad \frac{\gamma}{h} = \mu.$$

Nous trouvons donc une courbe triangulaire en projection horizontale et par suite également dans l'espace. Par exemple, si l'on prend $m = 3$, on a une cubique ayant un point de rebroussement à l'origine et dont le point d'inflexion I se projette sur la droite $y = h$, par conséquent a même z que le sommet S du cône circonscrit. La tangente en S à la trajectoire de S coupe le plan P de la courbe en un point A d'où l'on peut mener deux tangentes : l'une, c'est la tangente en I; soit B le point de contact de l'autre. Le plan tangent au cône le long de SB contenant la tangente en S à la trajectoire de S est perpendiculaire au plan SB, Oz (il est facile de vérifier que SB coupe Oz). Donc, pendant la rotation, le cône circonscrit reste tangent à deux surfaces : d'abord le plan perpendiculaire à Oz et passant par I; ensuite le cône de révolution décrit par SB. Les résultats sont absolument analogues si m est quelconque et positif. Voilà pour l'enveloppe des cônes. Pour celle des courbes, il y a, d'après ce que nous avons vu plus haut, un point C de la courbe situé dans le plan yOz où la tangente est parallèle à Ox; ce point décrit un cercle auquel la courbe reste tangente. On aura de même une surface Σ en faisant rouler sur un cône de sommet O le plan yOz lié à la courbe.

III. — Surfaces Σ engendrées par le mouvement d'une courbe plane indéformable : cas général.

Ici encore nous allons trouver des courbes triangulaires, j'entends par là des courbes ayant une équation de la forme

$$P^{\lambda} Q^{\lambda'} R^{\lambda''} = K,$$

λ, λ', λ'', K étant des constantes liées par la relation

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0,$$

$P=0$, $Q=0$, $R=0$ représentant trois droites formant un triangle. Je vais d'abord démontrer sur ces courbes un théorème que je ne crois pas connu et dont j'aurai besoin ultérieurement.

Théorème. — A toute courbe triangulaire correspond une droite Δ et une seule telle que les normales aux points où Δ rencontre la courbe soient concourantes en un point A; A et Δ restant les mêmes quelle que soit la constante K. Cette droite Δ est une droite de Simpson du triangle PQR. Si, de A, on abaisse des normales à la courbe, les pieds de ces normales, lorsque K varie, décrivent la droite Δ et le cercle circonscrit au triangle. Réciproquement, à toute droite de Simpson du triangle correspond un faisceau de courbes triangulaires.

Pour plus de commodité je désignerai Δ par *droite des normales* et A par *point des normales de la courbe*. Soit

$$F(x,y) \equiv P^{\lambda} Q^{\lambda'} R^{\lambda''} - K = 0, \qquad \lambda + \lambda' + \lambda'' = 0,$$
$$P = y - mx - h, \qquad Q = y - m'x - h', \qquad R = y - m''x - h'',$$

l'équation de la courbe. L'équation qui exprime que la normale en un point xy passe par x_0, y_0 est

$$(x_0 - x)(\lambda RQ + \lambda' RP + \lambda'' PQ)$$
$$+ (y_0 - y)(\lambda m QR - \lambda' m' RP + \lambda'' m'' PQ).$$

Cette équation représente une cubique indépendante de K. Elle doit contenir tous les points de Δ, ce qui donne, si Δ coïncide avec Oy,

$$\lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' = 0,$$

ou pour abréger

$$\Sigma \lambda m = 0, \qquad \Sigma \lambda m h = 0,$$
$$x_0 = \frac{\Sigma \lambda m h' h''}{\Sigma \lambda h}, \qquad y_0 = -\frac{\Sigma \lambda h' h''}{\Sigma \lambda h}.$$

Donc deux conditions :

$$\Sigma\lambda m = 0, \qquad \Sigma\lambda mh = 0;$$

comme on a aussi

$$\Sigma\lambda = 0,$$

ces trois conditions entraînent :

$$\begin{vmatrix} 1 & m & mh \\ 1 & m' & m'h' \\ 1 & m'' & m''h'' \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que Oy est une droite de Simpson du triangle. Ayant choisi dans le plan le triangle PQR, voyons comment il faut le déplacer dans son plan pour que les deux conditions $\Sigma\lambda m = 0$, $\Sigma\lambda mh = 0$ soient vérifiées. Choisissons l'angle φ de P avec Ox pour que $\Sigma\lambda m = 0$; cela nous donne, en posant $\tan\varphi = u$,

$$\lambda u + \frac{\lambda'(u+A)}{1-uA} + \frac{\lambda''(u+B)}{1-uB} = 0,$$

A et B étant différents de zéro d'après leur signification géométrique facile à voir. En développant et en supprimant le facteur u^2+1 il reste

$$\lambda AB u + \lambda' A + \lambda'' B = 0,$$

qui donne u. Ainsi pour que $\Sigma\lambda m$ soit nul, il faut que les côtés soient parallèles à trois droites parfaitement déterminées, donc un seul orientement. Je suppose donc le triangle orienté de façon que

$$\Sigma\lambda m = 0;$$

je dis qu'alors une translation de triangle parallèlement à Ox rendra $\Sigma\lambda mh$ nul. En effet, il faut disposer de μ pour que

$$\Sigma\lambda m(h + m\mu) = 0,$$

$$\mu = -\frac{\Sigma\lambda mh}{\Sigma\lambda m^2},$$

et $\Sigma\lambda m^2$ n'est pas nul sans quoi, comme on a

$$\Sigma\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma\lambda m = 0,$$

les trois quantités m, m', m'' ne seraient pas distinctes. Une translation parallèle à Oy ne change rien. Donc il existe une infinité de positions du triangle pour lesquelles les deux égalités

$$\Sigma\lambda m = 0, \qquad \Sigma\lambda mh = 0$$

sont vérifiées; mais elles se déduisent de l'une d'elles par une translation parallèle à Oy. Donc le triangle étant placé et les nombres λ, λ', λ'' choisis, il existe une seule droite Δ.

Réciproquement, considérons un triangle PQR et une de ses droites de Simpson que nous prenons pour axe des y. Si m, m', m'' sont les coefficients angulaires des trois côtés PQR, on devra prendre λ, λ', λ'' égaux ou proportionnels à

$$m' - m'', \qquad m'' - m, \qquad m - m',$$

afin que

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0 \quad \text{et} \quad \lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' = 0,$$

et, comme Oy est une droite de Simpson, on aura aussi

$$\lambda mh + \lambda' m' h' + \lambda'' m'' h'' = 0.$$

Revenons maintenant à l'équation de la cubique

$$\begin{aligned}(x_0 - x)(\lambda\,\mathrm{QR} + \lambda'\,\mathrm{RP} + \lambda''\,\mathrm{PQ})\\ + (y_0 - y)(\lambda m\,\mathrm{QR} + \lambda' m'\,\mathrm{RP} + \lambda'' m''\,\mathrm{PQ}) = 0;\end{aligned}$$

si Oy est la droite des normales, cette cubique se décompose en Oy et une conique. Or l'ensemble des termes du troisième degré est

$$-\Sigma\lambda m' m'' x(x^2 + y^2);$$

donc la conique est un cercle et c'est le cercle circonscrit au triangle PQR, car la cubique passe par les sommets du triangle et par la droite des normales dans le cas général.

Cas particulier des coniques. — Dans ce cas, deux des exposants λ, λ', λ'' sont égaux ; on a alors le théorème suivant :

Théorème. — Étant données toutes les coniques qui sont tangentes en B et C à deux droites sécantes AB, AC, il existe une droite Δ et une seule telle que les normales aux coniques aux points où elles coupent Δ soient concourantes en un point H. Si de H on mène des normales à toutes les coniques, les pieds de ces normales sont sur Δ et sur le cercle circonscrit ou triangle. Pour avoir ce point H on prolonge la médiane qui part de A jusqu'à sa rencontre en A' avec le cercle circonscrit et par ce point on mène la perpendiculaire à BC qui coupe le cercle au point cherché H. La droite de Simpson de H est la droite cherchée, elle est parallèle à la médiane AA'.

La première partie résulte de ce que j'ai dit plus haut, le reste est un problème facile de géométrie élémentaire. Je reviens maintenant à mon sujet.

Théorème I. — *Si une courbe plane indéformable engendre en se déplaçant une surface Σ cette courbe est nécessairement une courbe triangulaire.*

Je prends la courbe à l'instant t, son déplacement infiniment petit équivaut pour les vitesses à un mouvement hélicoïdal. Soit Oz l'axe de ce mouvement hélicoïdal instantané. Avec les notations habituelles nous avons ici

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta \neq 0, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad r \neq 0.$$

Soient

$$z = \mu y, \quad y = F(x)$$

les équations par rapport au trièdre mobile de la courbe qui se déplace. En posant

$$-\frac{\zeta}{r} = h,$$

l'équation qui exprime que les plans tangents le long de la courbe vont passer par le point S de coordonnées α, β, γ est

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - y & \gamma - \mu y \\ 1 & y' & \mu y' \\ y & -x & h \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(3) \quad y' = \frac{-\mu x y + \gamma x - h y + h\beta}{-\mu x^2 + (\mu\alpha - h)x + (\mu\beta - \gamma)y + h\alpha} = \frac{dy}{dx}.$$

On a encore une équation différentielle de Jacobi et l'on sait que l'intégrale est de la forme

$$(ax + by + c)^{\lambda}(a'x + b'y + c')^{\lambda'}(a''x + b''y + c'')^{\lambda'} = K$$

avec

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0.$$

Théorème II. — *La droite des normales de la courbe triangulaire est la caractéristique du plan de la courbe.*

En effet, écrivons que

$$(4) \quad (ax + b - y)^{\lambda}(a'x + b' - y)^{\lambda'}(a''x + b'' - y)^{\lambda''} = K$$

est solution de l'équation différentielle (3). De (4) nous tirons

$$(5)\quad y' = \frac{\lambda a QR + \lambda' a' RP + \lambda'' a'' PQ}{\lambda QR + \lambda' RP + \lambda'' PQ} \qquad (P = ax + b - y).$$

Au numérateur le coefficient de y^2 doit être nul, ce qui donne

$$\lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' = 0;$$

donc la droite des normales est parallèle à Oy. Je dis que cette droite a pour équation $x = -\frac{h}{\mu}$.

En effet, si l'on prend cette droite pour axe des y, l'équation devient

$$\left(ax + b - \frac{ah}{\mu} - y\right)^\lambda \times \left(a'x + b' - \frac{a'h}{\mu} - y\right)^{\lambda'} \left(a''x + b'' - \frac{a''h}{\mu} - y\right)^{\lambda''} = K,$$

et Oy sera la droite des normales si

$$\Sigma \lambda a \left(b - \frac{ah}{\mu}\right) = 0$$

ou

$$\frac{h}{\mu} = \frac{\Sigma \lambda ab}{\Sigma \lambda a^2}.$$

Or $\frac{h}{\mu}$ c'est le rapport des coefficients de y et xy au numérateur de y' dans (3); or dans (5) le rapport des mêmes coefficients est

$$\frac{\Sigma \lambda a (b' + b'')}{\Sigma \lambda a (a' + a'')} \quad \text{ou} \quad \frac{\Sigma \lambda ab}{\Sigma \lambda a^2}.$$

Je me suis servi de l'équation de la projection de la courbe sur xOy, alors que j'aurais dû prendre la courbe dans son plan afin de ne pas compliquer les notations. Il aurait fallu remplacer $aa' \ldots$ par $a_1 a'_1$. Mais les secondes sont proportionnelles aux premières. Ainsi les équations de la droite des normales sont

$$x = -\frac{h}{\mu}, \qquad z = \mu y.$$

Or les formules qui donnent la vitesse sont

$$V_x = -ry, \qquad V_y = rx, \qquad V_z = \zeta.$$

Sur la droite caractéristique du plan $z = \mu y$ la vitesse doit être dans ce plan, donc

$$\zeta = \mu r x,$$

d'où

$$x = \frac{1}{\mu}\frac{\zeta}{r} = -\frac{h}{\mu}.$$

Théorème III. — *Le point des normales coïncide à chaque instant avec le centre de courbure de l'arête de rebroussement* (λ) *de l'enveloppe du plan des courbes. Cette courbe* (λ) *doit donc avoir sa courbure constante.*

Je considère le trièdre de Frenet $Oxyz$ correspondant à cette courbe (λ). Ox sera la tangente, Oy la normale principale dirigée vers le centre de courbure et Oz la binormale. La courbe est dans le plan xOy et si elle se déplace dans ce plan, ce ne peut être que par une translation parallèle à Ox d'après ce qui précède. Nous verrons que cette translation est nulle. Soient α, β, γ les coordonnées du sommet S du cône. Les composantes de la vitesse d'un point de la courbe seront, en remarquant que q, η, ζ sont nuls,

$$\begin{aligned} V_x &= \xi - ry + A, \\ V_y &= rx, \\ V_z &= py. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - y & \gamma \\ 1 & y' & 0 \\ \xi - ry + A & rx & py \end{vmatrix} = 0,$$

A provenant de la translation possible parallèle à Ox. On tire de là

$$(6) \qquad y' = \frac{py^2 + r\gamma x - p\beta y}{pxy - (p\alpha + r\gamma)y + \gamma(\xi + A)}.$$

Soit maintenant

$$P^{\lambda}Q^{\lambda'}R^{\lambda''} = K, \qquad \lambda + \lambda' + \lambda'' = 0,$$
$$P = ay + x - b, \qquad Q = a'y + x - b', \qquad R = a''y + x - b'',$$

l'intégrale de l'équation différentielle. On tire de là

$$(7) \qquad y' = -\frac{\lambda QR + \lambda' RP + \lambda'' PQ}{\lambda a QR + \lambda' a' RP + \lambda'' a'' PQ}.$$

L'identification de (6) et (7) donne

$$\Sigma\lambda = 0, \qquad \Sigma\lambda a = 0, \qquad \Sigma\lambda ab = 0, \qquad \Sigma\lambda b'b'' = 0,$$

qui expriment que Ox est la droite des normales et que l'x du point des normales est nul. Donc pas de translation possible et par suite $A = 0$. On a ensuite, en appelant ρ un coefficient de proportionnalité,

$$\begin{aligned} -p\rho &= \Sigma\lambda a'a'', \\ -r\gamma\rho &= \Sigma\lambda b, \\ -p\beta\rho &= \Sigma\lambda(a'b'' + a''b'), \\ \rho(p\alpha + r\gamma) &= \Sigma\lambda a(a'b'' + a''b'), \\ \xi\gamma\rho &= \Sigma\lambda ab'b''. \end{aligned}$$

On tire de là

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{\Sigma\lambda ab'b''}{\Sigma\lambda b},$$

c'est précisément l'y du point des normales. Il suffit donc de constater que $y_0 = \frac{\xi}{r}$ est l'y du centre de courbure de (λ) ou le pied de la droite polaire ou le pied sur xOy de la caractéristique du plan normal qu'on obtient de suite en écrivant $V_x = 0$, d'où

$$y = \frac{\xi}{r}.$$

Il reste quatre équations qui donnent α, β, γ, ρ.

Conclusion. — « Ayant choisi une courbe T triangulaire, soit A son point des normales et Δ la droite des normales. On choisira une courbe (λ) à courbure constante égale à la distance de A à Δ et on la placera dans le trièdre de Frenet de (λ) de telle sorte que Δ coïncide avec Ox et A avec le centre de courbure de (λ). La courbe T liée au trièdre décrira une surface Σ et les points où cette courbe rencontre l'axe Ox du trièdre décriront des courbes auxquelles T restera tangente. »

Cette dernière partie est facile à vérifier avec les formules qui donnent la vitesse. On suppose évidemment que T n'est pas une conique.

(*A suivre.*)