

L. BRAUDE

## Sur quelques enveloppes

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1913), p. 337-353

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1913\\_4\\_13\\_\\_337\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__337_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O2f]

SUR QUELQUES ENVELOPPES;

PAR M. L. BRAUDE, à Bierstadt-Wiesbaden.

I.

1. La discussion des enveloppes est souvent assez difficile, quand on applique seulement des coordonnées cartésiennes. En ce cas, il est recommandable de se servir des *coordonnées intrinsèques* <sup>(1)</sup>, c'est-à-dire d'une relation entre l'arc  $s$  et le rayon de courbure  $R$ .

---

<sup>(1)</sup> Voir E. WOLFFING, *Bericht über den gegenwertigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten* (*Bibl. Math.*, 3<sup>e</sup> série, t. I, 1900, p. 142-159). — CESÀRO-KOWALEWSKI, *Vorlesungen über natürliche Geometrie* Leipzig, B.-G. Teubner, 1901. — Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes*. Paris, 1873.

Aux publications de E. Cesàro, dont la plupart se trouvent dans ce journal, et qui sont réunies dans son œuvre (1), il y a beaucoup d'exemples dont nous allons généraliser quelques-uns dans cet article. Nous aurons donc des théorèmes connus sous une autre forme ou des propriétés inconnues de certaines familles de courbes planes. Il y a presque toujours une contenance avec les *développées intermédiaires* (2) que j'ai définies comme lieu du point, qui divise les rayons de courbure dans un rapport constant.

2. E. Cesàro a défini (3) la famille des courbes dénommées d'après lui, qui contient, par exemple, les *spirales sinusoides* (4), les *courbes de Ribaucour* (5), les *cycloïdales* (6) et les *coniques*, par la propriété suivante :

*Le rayon de courbure  $\left( R, \equiv R \frac{dR}{ds} \right)$  de la développée est divisé dans un rapport constant par son intersection avec le rayon vecteur.*

Nous profitons de cette propriété pour traiter les *cycloïdales*.

(1) Voir la note (1) de la page précédente.

(2) Voir ma Thèse, *Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve*. Heidelberg, 1911.

(3) *Nouvelles Annales*, 3<sup>e</sup> série, t. VII, 1888, p. 171-190; 3<sup>e</sup> série, t. IX, 1890, p. 143-157; 3<sup>e</sup> série, t. XIII, 1894, p. 102-106. — Voir aussi CESÀRO-KOWALEWSKI, *loc. cit.*, p. 54, ou H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven*, 1908, p. 303, ou enfin F.-G. TEIXEIRA, *Traite des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, t. I, p. 273. Coïmbre, 1908.

(4) G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, II. Auflage, t. I, p. 240; Leipzig, 1910-1911, H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 134; CESÀRO, *loc. cit.*, p. 61; TEIXEIRA, *loc. cit.*, p. 259.

(5) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 137; WIELEITNER, p. 299; CESÀRO, p. 94; TEIXEIRA, t. II, p. 282.

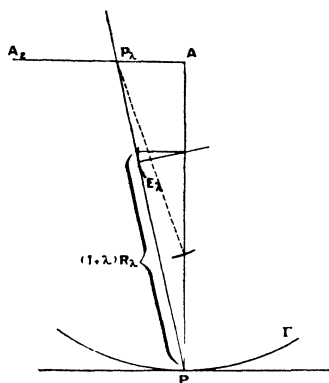
(6) WIELEITNER, p. 195; CESÀRO, p. 58; TEIXEIRA, t. II, p. 135.

Nous menons par chaque point  $P$  de la courbe  $\Gamma$  et par le point  $P_\lambda$ , qui divise le rayon de courbure de la développée de  $\Gamma$  au rapport constant  $\frac{1-\lambda}{\lambda}$  une droite; chercher l'enveloppe  $E_\lambda$  de la droite.

Si  $\Gamma$  est une courbe de Cesàro, nous aurons pour une certaine valeur de  $\lambda$  le pôle  $O$  comme enveloppe.

Soient (fig. 1)  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point

Fig. 1.



quelconque par rapport au système <sup>(1)</sup> de la tangente et de la normale de  $P$ . Le premier centre de courbure  $A_1$  de  $P$  a donc les coordonnées  $x_1 = 0, y_1 = R$ .

Si  $R_1, R_2, \dots$  sont les rayons de courbure supérieurs ( $R_n = R \frac{dR_{n-1}}{ds}$ ), on a comme coordonnées de  $P_\lambda$  :

$$(1) \quad x_2 = -\lambda R_1, \quad y_2 = R.$$

L'équation de la droite  $PP_\lambda$  est donc

$$(1') \quad \lambda R x + R_1 y = 0,$$

(1) CESÀRO, p. 21; WIELEITNER, p. 173.

ou, comme  $R_1 = R \frac{dR}{ds}$ ,

$$(2) \quad f(x, y, s) \equiv \lambda x + y \frac{dR}{ds} = 0.$$

Pour avoir  $x$  et  $y$  comme fonction de  $s$ , il faut différentier (2) sous la forme (1)

$$(3) \quad (y - R) \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

d'où il résulte

$$(4) \quad x \frac{dR}{ds} - y \left( \lambda + R \frac{d^2 R}{ds^2} \right) + \lambda R = 0.$$

On a donc par (2) et (4)

$$(5) \quad \begin{cases} x = - \frac{\lambda R \frac{dR}{ds}}{\lambda^2 + \left( \frac{dR}{ds} \right)^2 + \lambda R \frac{d^2 R}{ds^2}}, \\ y = \frac{\lambda^2 R}{\lambda^2 + \left( \frac{dR}{ds} \right)^2 + \lambda R \frac{d^2 R}{ds^2}} \end{cases}$$

ou, comme

$$(6) \quad \frac{dR}{ds} = \frac{R_1}{R}, \quad \frac{d^2 R}{ds^2} = \frac{R R_2 - R_1^2}{R^3},$$

$$(7) \quad \begin{cases} x = - \frac{\lambda R^2 R_1}{\lambda^2 R^2 + R_1^2 (1 - \lambda) + \lambda R R_2}, \\ y = \frac{\lambda^2 R^3}{\lambda^2 R^2 + R_1^2 (1 - \lambda) + \lambda R R_2}. \end{cases}$$

Si  $\lambda = \infty$ , (2) représente la normale de  $\Gamma$  (1), soit  $x = 0$ ; par (5) ou (7) on a

$$x = 0, \quad y = R,$$

le point  $A_1$ ; si  $\lambda = 0$ , on a

$$x = 0, \quad y = 0,$$

(1) CESÀRO, p. 24; WIELEITNER, p. 176.

c'est-à-dire la courbe  $\Gamma$  elle-même. Pour  $\lambda = 1$ , on cherche l'enveloppe de  $PA_2$  où  $A_2$  est le second centre de courbure de  $P$ . L'équation (1) est alors (1)

$$(1\alpha) \quad Rx + R_1y = 0$$

et l'on a

$$(7\alpha) \quad \begin{cases} x = -\frac{RR_1}{R + R_2}, \\ y = \frac{R^2}{R + R_2}. \end{cases}$$

Si  $\lambda = -1$ , la droite est menée par  $P$  et le point correspondant de l'*antévolute* de la développée de  $\Gamma$ ; on a donc (2)

$$(1\beta) \quad Rx - R_1y = 0,$$

$$(7\beta) \quad \begin{cases} x = \frac{R^2 R_1}{R^2 + 2R_1^2 - RR_2}, \\ y = \frac{R^3}{R^2 + 2R_1^2 - RR_2}. \end{cases}$$

3. Pour construire le point de contact  $Q(x, y)$ , nous nous servons d'une certaine développée imparfaite de  $\Gamma$ . Soit  $P_\lambda(x = 0, y = \frac{R}{1 + \lambda})$  le point de cette courbe correspondant à  $P(0, 0)$ , alors la normale au point  $P_\lambda$  est parallèle à la droite (1'), car on a (voir *fig. 1*)

$$(8) \quad \tan \varphi = \frac{dR}{\lambda ds} = \frac{R_1}{\lambda R}.$$

Le rayon vecteur  $PQ$  est

$$(9) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\lambda R^2 (\lambda^2 R^2 + R_1^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2 R^2 + R_1^2 (1 - \lambda) + \lambda RR_2}.$$

(1) CESARO, p. 37.

(2) Les courbes pour lesquelles toutes les droites (1') sont parallèles sont des courbes de *Ribaucour*; si  $\lambda = -1$ , on a une *chaînette d'égal résistance*.

Mais comme le rayon de courbure  $(1)$  de  $P_\lambda$  est

$$(10) \quad R_\lambda = \frac{(\lambda^2 R^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \lambda) [\lambda^2 R^2 + R_1^2(1 - \lambda) + \lambda R R_2]},$$

on a enfin

$$(11) \quad r = \frac{1 + \lambda}{\lambda} R_\lambda \cos^2 \varphi.$$

On a donc la construction suivante de Q :

Soit M un point sur  $(1')$  de sorte que  $PM = R_\lambda \frac{1 + \lambda}{\lambda}$  ; quand on projette M en N sur la normale de  $\Gamma$ , la projection de N sur  $(1')$  est le point Q.

Pour  $\lambda = -3$ , on a

$$(12) \quad \begin{cases} x = \frac{3 R^2 R_1}{9 R^2 + 4 R_1^2 - 3 R R_2}, \\ y = \frac{9 R^3}{9 R^2 + 4 R_1^2 - 3 R R_2}. \end{cases}$$

Le lieu de (12) est d'après Cesàro  $(2)$  le lieu des centres des coniques osculantes la courbe  $\Gamma$ .

Au général, l'enveloppe  $(7)$  est le lieu des centres des cercles directeurs des courbes de Cesàro de l'indice  $n = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$ , qui osculent la courbe  $\Gamma$ .

Si le rayon du cercle osculateur est zéro, les courbes de Cesàro sont des spirales sinusoides; si  $r = \infty$ , on a des courbes de Ribaucour.

Au système (tangente normale), l'équation de la directrice est  $(3)$

$$(13) \quad x \frac{1 + n}{1 - n} \frac{dR}{ds} - y + \frac{n + 1}{2} R = 0.$$

$(1)$  Thèse, p. 16.

$(2)$  CESÀRO, p. 77-78.

$(3)$  CESÀRO, p. 77.

Mais cette droite est la tangente de la dérivée imparfaite  $\lambda = \frac{1-n}{1+n}$ , car, en différentiant (13) d'après (3), on a

$$(13a) \quad x \frac{dR}{\lambda ds} - y + \frac{R}{1+\lambda} = 0,$$

$$(13b) \quad x \left( 1 + \frac{RR_2 - R_1^2}{\lambda R^2} \right) + y \frac{R_1}{\lambda R} - \frac{R_1}{\lambda(1+\lambda)} = 0,$$

d'où

$$x = 0, \quad y = \frac{R}{1+\lambda}.$$

Nous avons donc une nouvelle génération des développées imparfaites, soit :

*Les directrices des courbes de Ribaucour d'indice  $n = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ , qui osculent la courbe  $\Gamma$ , enveloppent la développée imparfaite  $\lambda$ .*

Comme cas spécial, les directrices des *cycloïdes* osculantes ( $n=0$ ) enveloppent la *développée moyenne* ( $\lambda=1$ ), celles des *paraboles* osculantes <sup>(1)</sup> ( $n=-2$ ) enveloppent la développée  $\lambda=-3$ , enfin celle des *chatnettes* osculantes <sup>(2)</sup> ( $n=-3$ ) enveloppent l'*antévolute* ( $\lambda=-2$ ).

EXEMPLES. — I. Pour les *cycloïdales* <sup>(3)</sup>

$$(14) \quad \frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1,$$

<sup>(1)</sup> CESÀRO trouve comme lieu du point de contact  $x=0$ ,  $y = -\frac{R}{2}$  (voir p. 78).

<sup>(2)</sup> Cette développée imparfaite fut définie par Jacques Bernoulli, *Lineæ cycloïdales, evolutæ, antevolūtæ, etc.* (*Acta Erud.*, mai 1692). — *Thèse*, p. 18.

<sup>(3)</sup> LORIA, t. II, p. 105; CESÀRO, p. 83.



on a comme développées des trochoïdes du même module.

Alors les directrices des courbes de Ribaucour d'un module quelconque osculant la courbe (14) enveloppent une certaine trochoïde.

Si  $\lambda = \pm \frac{b}{a}$  on a comme trochoïde le cercle directeur et nous trouvons :

Les directrices des courbes de Ribaucour de l'indice

$$(15) \quad n_1 = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{ou} \quad n_2 = \frac{a+b}{a-b}$$

osculant (14), enveloppent le cercle directeur.

Pour l'*hypocycloïde tricuspide*, la développée imparfaite  $\lambda = 3$  ou  $\lambda = -3$  est la circonférence, menée par les rebroussements; au dernier cas les courbes osculantes sont des *paraboles* (1).

Soit (14) une *astroïde droite*

$$(16) \quad 4s^2 + R^2 = C^2,$$

Alors la circonférence menée par les rebroussements est reçue comme enveloppe des directrices des *chatnettes* et des *astroïdes obliques* (2) osculant ( $\lambda = -2$ ).

La développée imparfaite  $\lambda = -\frac{b^2}{a^2}$  de (14) est (3) une rhodonée, la podaire de la développée. Alors on trouve :

(1) Cette génération se trouve dans CESÀRO, p. 78.

(2) WIELEITNER, p. 301, voir mon article aux *Monatshefte*, de Vienne: *Über Parallelkurven der Epi- und Hypozykloïden*, 1913, p. 186.

(3) *Thèse*, p. 22. Quant aux rhodonées, voir LORIA, t. I, p. 358; WIELEITNER, p. 238; TEIXEIRA, p. 211.

Les directrices des courbes de Ribaucour de l'indice  $n' = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$  osculant la courbe (14) est une rhodonnée du module  $\frac{b}{a}$ .

II. Pour les courbes parallèles à (14) qui ont les coordonnées intrinsèques

$$(17) \quad s = a(\varphi - \sin \varphi), \quad R = b(1 - \cos \varphi),$$

les développées intermédiaires  $\lambda = \pm \frac{b}{a}$  sont deux cycloïdales, qui ont la même base circulaire (1). Elles sont *anticycloïdales*, leurs rebroussements sont situés dans chaque deuxième rebroussement de la développée de (17).

Par exemple, les directrices des chaînettes osculant l'astroïde oblique à deux points triples, enveloppent une *néphroïde de Proctor*.

III. Comme la développée imparfaite  $\lambda = \frac{1-n}{1+n}$  d'une spirale sinusöide de l'indice  $n$  est (2) une courbe analogue de l'indice  $n_1 = \frac{n}{1-n}$ , nous trouvons :

Les directrices des courbes de Ribaucour de module  $\frac{1}{n}$ , qui osculent une spirale sinusöide du module  $n$ , enveloppent une spirale sinusöide de l'indice  $\frac{n}{1-n}$ .

IV. Enfin chaque développée intermédiaire d'une spirale logarithmique

$$(18) \quad R = as$$

(1) Voir la note (2) de la page précédente.

(2) Thèse, p. 41.

est une spirale congruente <sup>(1)</sup>. Alors l'enveloppe des directrices des courbes de Ribaucour d'un module quelconque, qui osculent la spirale (18), est une spirale congruente, qui a le même pôle.

4. Pour avoir les coordonnées intrinsèques de  $E$ , nous formons <sup>(2)</sup>, d'après Cesàro :

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1 = -R_1 U, \\ \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{R} = \lambda R U. \end{cases}$$

où

$$(19') \quad U = \frac{(\lambda-1)R_1[\lambda^2 R^2 + R_1^2 + 3\lambda(RR_2 - R_1^2) + \lambda^2 R(R_1 R_2 - RR_3)]}{[\lambda^2 R^2 + R_1^2(1-\lambda) + \lambda RR_2]^2}.$$

Alors  $U = 0$  est l'équation différentielle des courbes de Cesàro <sup>(3)</sup> pour lesquelles l'enveloppe  $E_\lambda$  est un point fixe. Les coordonnées intrinsèques de  $E_\lambda$  sont :

$$(20) \quad \begin{cases} s' = \int \sqrt{\lambda^2 R^2 + R_1^2} U ds, \\ R' = \frac{U R (\lambda^2 R^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 R^2 + R_1^2(1-\lambda) + \lambda RR_2} = U R R_\lambda (1+\lambda). \end{cases}$$

Si  $\lambda = 1$ , on a pour l'enveloppe de  $(1_\alpha)$

$$(21) \quad \begin{cases} s'_1 = \int \frac{(R_1 R_2 - RR_3) \sqrt{\lambda^2 R^2 + R_1^2}}{R(R+R_2)^2} ds, \\ R'_1 = \frac{(R_1 R_2 - RR_3)(R^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}}{(R+R_2)^4}. \end{cases}$$

EXEMPLES. — I. Soit  $\Gamma$  la cycloïdale

$$(22) \quad s^2 + \frac{R^2}{\lambda^2} = 1.$$

<sup>(1)</sup> Thèse, p. 22.

<sup>(2)</sup> CESÀRO, p. 21-24; WIELBITNER, p. 174-175.

<sup>(3)</sup> CESÀRO, p. 77.

En faisant  $s = \cos \varphi$ ,  $R = \lambda \sin \varphi$ , nous avons, d'après (7),

$$(23) \quad \begin{cases} x = \frac{\lambda}{1+\lambda} \sin^2 \varphi \cos \varphi, \\ y = \frac{\lambda}{1+\lambda} \sin^3 \varphi, \end{cases}$$

d'où, selon (19),

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\delta x}{ds} = \frac{1-3\lambda}{1-\lambda} \cos^2 \varphi, \\ \frac{\delta y}{ds} = \frac{1-3\lambda}{1-\lambda} \cos \varphi \sin \varphi. \end{cases}$$

Les coordonnées intrinsèques de  $P_\lambda$  sont alors (1)

$$(25) \quad \begin{cases} s' = \int ds \sqrt{\left(\frac{\delta x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{ds}\right)^2}, \\ R' = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{ds}\right)^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{d}{ds} \operatorname{arc tang} \frac{\delta y}{\delta x}\right) \end{cases}$$

ou

$$(26) \quad \begin{cases} s' = \frac{1-3\lambda}{4(1-\lambda)} \cos 2\varphi. \\ R' = \frac{\lambda(1-3\lambda)}{4(1-\lambda)} \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Alors l'équation intrinsèque de  $P_\lambda$  est

$$(27) \quad 4\lambda^2 s'^2 + (1-\lambda)^2 R'^2 = \left[\frac{\lambda(1-3\lambda)}{2(1-\lambda)}\right]^2.$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $-\lambda$ , nous avons de même

$$(27') \quad 4\lambda^2 s'^2 + (1+\lambda)^2 R'^2 = \left[\frac{\lambda(1+3\lambda)}{2(1+\lambda)}\right]^2.$$

Mais comme la développée intermédiaire  $\pm \lambda$  de (22) est la circonférence fondamentale, nous avons le théorème suivant :

---

(1) CESÀRO, p. 21-24; WIELBITNER, p. 173.

Lorsque la normale de la cycloïdale (22) coupe la circonférence aux points  $P_\lambda$  et  $P_{-\lambda}$ , les enveloppes des droites, menées par P, parallèles aux normales de  $P_\lambda$  et de  $P_{-\lambda}$ , sont deux cycloïdales (27) et (27').

Si  $\lambda = \pm 1$ , (22) est une cycloïde; au premier cas toutes les droites sont parallèles, (27') est une cycloïde congruente.

Si  $\lambda = \pm 3$ , (22) est une hypocycloïde tricuspide, (27) une courbe semblable, (27') une hypocycloïde à six rebroussements.

Soit  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ ; alors (22) est une néphroïde de Proctor (1), (27) une astroïde.

Si  $\lambda = \pm \frac{1}{3}$ , (22) est une cardioïde; au premier cas on a un point, le rebroussement réel; au second une néphroïde.

II. Pour la spirale logarithmique, dont l'équation

$$(28) \quad R = as.$$

l'angle  $\varphi$  est toujours constant; on a donc une développée congruente.

## II.

5. Dans ce qui suit, nous voulons chercher les enveloppes de quelques systèmes de circonférences. Chaque courbe est l'enveloppe de ses cercles osculateurs; *c'est pourquoi nous voulons dilater les cercles osculateurs du centre ou du point de contact et déterminer l'enveloppe.*

---

(1) C. PROCTOR, *A treatise on the cycloid and all forms of the cycloidal curves*, p. 176, London, 1878; LORIA, t. II, p. 113; WIELEITNER, p. 139. Voir aussi la Thèse de R.-C. ARCHIBALD, *The cardioïde and some of its related curves*, Strasbourg, 1900, et mon article, cité à la note (3) de la page 344.

Au premier cas l'équation de la circonférence dilatée est

$$(29) \quad x^2 + (y - R)^2 - \mu^2 R^2 = 0,$$

d'où l'on a, d'après (3),

$$(30) \quad \begin{cases} x = \pm R \mu \sqrt{1 - \mu^2}, \\ y = R(1 - \mu^2). \end{cases}$$

Il y a donc une enveloppe seulement si  $\mu < 1$ , c'est-à-dire en contractant les cercles. En faisant  $\mu = \cos \alpha$ , on a

$$(31) \quad x = \pm R \sin \alpha \cos \alpha, \quad y = R \sin^2 \alpha.$$

Mais le lieu <sup>(1)</sup> de ces points est composé de deux développoides aux angles  $\pm \alpha$ ; nous avons donc le théorème :

*L'enveloppe des cercles osculateurs contractés du centre de courbure se décompose en deux développoides.*

Cette génération nous rappelle la construction du point de contact par Réaumur <sup>(2)</sup>.

6. *Dilatons les cercles osculateurs des points de contact; le lieu de ses centres est alors une certaine développée intermédiaire.*

L'équation du cercle est

$$(32) \quad x^2 + (y - \mu R)^2 = \mu^2 R^2$$

ou

$$(33) \quad f(x, y, s) \equiv x^2 + y^2 - 2\mu R y = 0.$$

En différentiant d'après (3), on a

$$(34) \quad (\mu - 1)Rx - \mu R_1 y = 0.$$

<sup>(1)</sup> WIELEITNER, p. 177.

<sup>(2)</sup> LORIA, t. II, p. 262; WIELEITNER, p. 177.

Cette droite, dont nous avons déjà trouvé l'enveloppe, est parallèle à la normale du lieu de  $x = 0$ ,  $y = \mu R$ , c'est-à-dire du centre de (32). En faisant

$$(35) \quad \mu = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{1-\mu}{\mu},$$

nous avons par (33) et (34)

$$(35) \quad x = \frac{-2\lambda R^2 R_1}{(1+\lambda)(\lambda^2 R^2 + R_1^2)}, \quad y = \frac{2\lambda^2 R^3}{(1+\lambda)(\lambda^2 R^2 + R_1^2)}.$$

On a donc, d'après (8),

$$(36) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2R}{1+\lambda} \cos \varphi,$$

d'où il résulte :

*Lorsque la circonférence (32) coupe la normale de  $\Gamma$  encore au point*

$$P' \left( x = 0, y = \frac{2R}{1+\lambda} \right)$$

*la projection de  $P'$  sur la droite (34)*

$$(37) \quad \lambda R x + R_1 y = 0$$

*est le point de contact; la normale de l'enveloppe contient naturellement le centre de (32).*

De même le lieu de (35) a la qualité suivante :

*C'est le lieu des pôles des spirales sinusoides de l'indice  $n = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$  qui osculent la courbe  $\Gamma$ .*

Cesàro avait trouvé (1) comme cas spéciaux le lieu des foyers de parabolès osculantes  $\left( n = -\frac{1}{2}, \lambda = 3 \right)$ ,

---

(1) CESÀRO, p. 79-80.

et le lieu des centres des *hyperboles équilatères* osculantes ( $n = -3$ ,  $\lambda = -2$ ).

EXEMPLES. — I. Soit  $\Gamma$  la cycloïdale (22). Nous avons donc (35) :

$$(38) \quad \begin{cases} x = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \cos \varphi \sin^2 \varphi, \\ y = \frac{2\lambda}{1-\lambda} \sin^3 \varphi, \end{cases}$$

et d'après (19)

$$(39) \quad \frac{\delta x}{\delta s} = \frac{1-3\lambda}{1+\lambda} \cos 2\varphi, \quad \frac{\delta y}{\delta s} = \frac{1-3\lambda}{1+\lambda} \sin 2\varphi.$$

Les coordonnées intrinsèques de l'enveloppe sont alors

$$(40) \quad s' = \frac{1-3\lambda}{1+\lambda} s, \quad R' = \frac{1-3\lambda}{(1+\lambda)(1-2\lambda)} R,$$

et son équation intrinsèque

$$(41) \quad \lambda^2 s'^2 + (1-2\lambda)^2 R'^2 = \left[ \frac{\lambda(3\lambda-1)}{\lambda+1} \right]^2.$$

Pour  $E_{-\lambda}$ , on a

$$(42) \quad \lambda^2 s'^2 + (1+2\lambda)^2 R'^2 = \left[ \frac{\lambda(3\lambda+1)}{\lambda-1} \right]^2.$$

Mais comme les développées intermédiaires  $\pm \lambda$  de (22) sont la base circulaire, nous avons le théorème :

*Lorsque la normale au point P de la cycloïdale (22) coupe la circonférence aux points P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub>, les enveloppes des circonférences dont PP<sub>1</sub> et PP<sub>2</sub> sont des diamètres se décomposent toujours en (22) et une autre cycloïdale (42) ou (41).*

II. Traitons comme exemple les développantes des cycloïdales, dont les coordonnées intrinsèques sont (17) :

$$(43) \quad s = \varphi - \sin \varphi, \quad R = \lambda(1 - \cos \varphi).$$



Par élimination de  $\varphi$ , on a comme *équation intrinsèque*

$$(44) \quad s = \frac{1}{\lambda} \int dR \sqrt{\frac{R}{2\lambda - R}}.$$

D'après (35), on a

$$(45) \quad \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{1+\lambda} \sin \varphi (1 - \cos \varphi), \\ y = \frac{\lambda}{1-\lambda} (1 - \cos \varphi)^2 \end{cases}$$

et

$$(46) \quad \frac{dx}{ds} = -\frac{\lambda}{1+\lambda} (1 + 2 \cos \varphi), \quad \frac{dy}{ds} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \sin \varphi.$$

On trouve donc selon (19)

$$(47) \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1-2\lambda}{1+\lambda} \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{1-2\lambda}{1+\lambda} \sin \varphi,$$

et d'après (25)

$$(48) \quad \begin{cases} s' = \frac{2\lambda-1}{1+\lambda} (\varphi - \sin \varphi), \\ R' = \frac{\lambda(2\lambda-1)}{1-\lambda^2} (1 - \cos \varphi). \end{cases}$$

En changeant  $\lambda$  en  $-\lambda$ , on a de même :

$$(49) \quad \begin{cases} s'' = \frac{2\lambda+1}{1-\lambda} (\varphi - \sin \varphi), \\ R'' = \frac{\lambda(2\lambda+1)}{1-\lambda^2} (1 - \cos \varphi). \end{cases}$$

L'équation intrinsèque a la forme

$$(48') \quad R' = \frac{2\lambda-1}{1+\lambda} \left( 1 - \cos \frac{\lambda}{\lambda-1} \omega \right)$$

ou

$$(49') \quad R'' = \frac{2\lambda+1}{1-\lambda} \left( 1 - \cos \frac{\lambda}{\lambda+1} \omega \right).$$

Pour les développantes des cycloïdales (73), les dérivées sont des courbes analogues, les développées intermédiaires sont, comme nous l'avons déjà mentionné, deux cycloïdales analogues.