Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 135-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__135_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Énoncer les principaux théorèmes relatifs aux séries à termes positifs.*

2° *Démontrer le théorème basé sur l'étude du rapport* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

3° *Indiquer la marche à suivre pour le calcul approché* *d'une série. Application : Calculer à* $\frac{1}{100\,000}$ *près la valeur de la série* $u_n = \frac{1}{(n\,!)^4}$.

Calcul. — *On donne la courbe* $y = \sqrt{2}\,(\sin x - \cos x)$. *La construire. Évaluer la longueur d'un arc, l'aire comprise entre une boucle et l'axe des* x, *les coordonnées du centre de gravité, le volume engendré par l'aire d'une boucle tournant autour de* Ox.

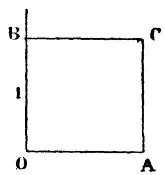
Épreuve pratique. — 1° *Intégrer*

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

2° *L'expression*

$$du = 2x\,\frac{e^y - e^{-y}}{(x^2+1)^2}\,dx + \frac{x^2 e^y - e^{-y}}{x^2+1}\,dy$$

est-elle une différentielle exacte ?



L'intégrer suivant OAC, *suivant* OBC.

(Juin 1911.)

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation linéaire à coefficients constants*

$$\frac{d^2y}{dx} - 2\,\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^x.$$

2° *Déterminer les constantes d'intégration de façon que la courbe* $y = f(x)$ *passe par l'origine des coordonnées et soit tangente en ce point à* Ox.

3° *Calculer l'aire comprise entre la courbe ainsi déterminée, l'axe des* x *et les abscisses* 0 *et* 1.

II. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + (x^2 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - (x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

définissant une fonction z de x et y.

On fait le changement de variables

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

en prenant ρ et φ comme nouvelles variables indépendantes.

Intégrer l'équation transformée. Donner l'intégrale de l'équation primitive.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Appliquer la méthode des parties proportionnelles, puis la méthode de Newton au calcul approché des racines de l'équation*

$$z^4 - z + 1 = 0.$$

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Expliquer sur l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{ax}$$

la méthode d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Donner l'intégrale générale.

2° *Cas où $a = 2$.*

3° *Dans le cas où $a \neq 2$ ou 3, en considérant cette intégrale comme l'équation d'une courbe, déterminer les constantes arbitraires de façon que la courbe passe par l'origine et soit tangente en ce point à Ox.*

4° *En supposant $a = 4$, déterminer les points d'inflexion de cette courbe.*

5° *Construire cette courbe. Calculer la fraction de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x, dans la* région *négative des abscisses.*

(Novembre 1912.)

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Cours. — *Maxima et minima de la fonction*

$$u = \frac{Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

à l'égard des trois variables indépendantes x, y et z; application à la démonstration de la réalité des racines de l'équation en S.

Problèmes. — I. *Condition pour qu'un cône du second degré admette un système de trois génératrices perpendiculaires deux à deux.*

II. *Transformer et intégrer l'équation*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2},$$

par le changement de variables

$$\xi = x + at,$$
$$\zeta = x - at.$$

III. *Déterminer la fonction de n variables indépendantes x_1, x_2, x_3 ... x_n qui, étant de la forme*

$$F(r); \qquad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

satisfait identiquement à l'équation

$$\frac{d^2 F}{dx_1^2} + \frac{d^2 F}{dx_2^2} + \ldots + \frac{d^2 F}{dx_n^2} = 0.$$

Cas particuliers de $n = 2$ et de $n = 3$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Quelles sont les surfaces représentées par l'équation*

$$-9ax^2 + (8 - a)y^2 - 2xy(3a + 4) - z^2 - 2yz - 22x = 0$$

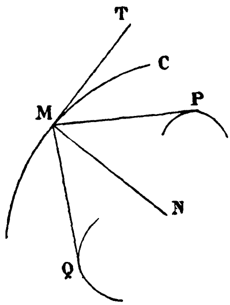
pour les diverses valeurs de a?

(Juin 1912.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que toute courbe, pour laquelle le rayon de courbure reste constant quand on se déplace le long de la courbe, est un cercle.*

II. *Soient* C *une courbe,* M *un point quelconque pris sur la courbe,* MN *la normale. On considère un angle droit*



QMP *dont la bissectrice est la normale* MN. *Lorsque* M *varie, les droites* MP *et* MQ *ont chacune une enveloppe.*

1° *Démontrer que les points* P, Q, *où les droites* MP, MQ *touchent respectivement leurs enveloppes, sont à égale distance du point* M.

2° *Quelle doit être la courbe* C *pour que les distances égales* MP, MQ *restent constantes lorsque le point* M *se déplace sur la courbe* C.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'ellipse* ABA'B' *qu'on suppose représenter une méridienne de la surface terrestre,* B'B *étant la ligne des pôles. L'équation de cette ellipse dans le système d'axes rectangulaires* Ox, Oy *sera*

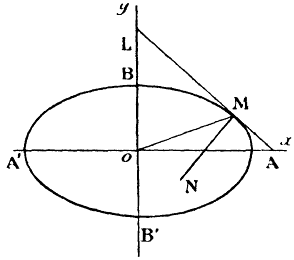
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et l'on donne

$$a = 6378^{\text{km}}, \qquad b = 6356^{\text{km}}.$$

Si M *est un point quelconque de la portion* AB *de l'ellipse,* ML *la tangente en* M *qui fait avec* Oy *un angle* φ

égal à la latitude *du point* M, *la verticale apparente* MN *est la normale en* M *à l'ellipse. Cette verticale fait avec*



OM *un angle* Σ *variable avec* φ. *On demande de calculer, à* 1′ *près, la latitude pour laquelle* Σ *est maximum et, à* 1″ *près, la valeur de ce maximum.*

(Novembre 1911.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1)\qquad (1+x^2)y'+2xy-2x\sin x-(1+x^2)\cos x=0.$$

2° *Déduire du résultat trouvé l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(2)\qquad (1+x^2)y''+2xy'-2x\sin x-(1+x^2)\cos x=0.$$

3° *Quelle est l'intégrale particulière de l'équation* (2) *qui s'annule en même temps que sa dérivée pour* $x=0$?

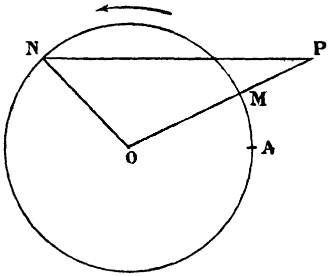
II. *Un point* M, *primitivement en* A, *décrit la circonférence de centre* O *et de rayon* OA = R *dans le sens de la flèche. On porte sur* OM, *dans le sens du vecteur* $\overline{\mathrm{OM}}$, *un segment* $\overline{\mathrm{MP}}$ *de longueur égale à celle de l'arc* AM.

1° *Construire le lieu géométrique* C *du point* P.

2° *Montrer que la normale à la courbe* C *au point* P *passe par le point* N *de la circonférence, tel que l'angle* MON *soit égal à un angle droit.*

3° *Évaluer la longueur de l'arc décrit par le point* P *quand le point* M *a décrit sur la circonférence un arc de longueur s.*

4° *Évaluer l'aire balayée par le segment* MP *quand le*



point M *a décrit sur la circonférence un arc de longueur s. Cas particulier où* $s = 2\pi R$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Appliquer le développement en série de* e^x *au calcul de* $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ *avec trois décimales.*

II. *Montrer que l'équation*

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 5 = 0$$

a une seule racine réelle, et calculer cette racine avec deux décimales.

(Novembre 1911.)