NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Sur les normales à une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 534-535

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__534_1>

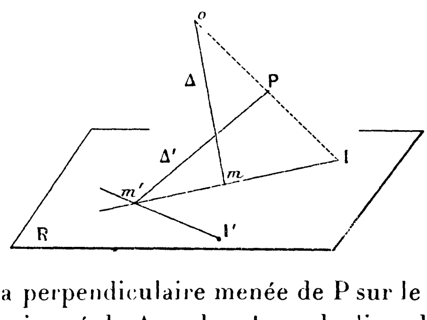
[L^2 8a]

SUR LES NORMALES A UNE QUADRIQUE;

Par M. J. LEMAIRE.

Chasles a remarqué que l'hyperbole d'Apollonius relative à une conique et à un point est le lieu des points communs aux diamètres de cette conique et aux perpendiculaires menées du point considéré sur les directions conjuguées; on peut donner un mode de génération analogue pour la cubique aux pieds des normales à une quadrique S issues d'un point P.

Soient Δ un diamètre quelconque de la quadrique S que nous supposons posséder un centre O à distance



finie, Δ' la perpendiculaire menée de P sur le plan diamétral conjugué de Δ : cherchons le lieu des points communs à celles des droites correspondantes Δ et Δ' qui se rencontrent.

A quatre droites Δ en même plan correspondent quatre droites Δ' en même plan, et réciproquement, et les deux faisceaux ont même rapport anharmonique. Par conséquent les traces m, m' de Δ', sur un même plan R, sont des points homologues de deux figures homographiques (m) et (m').

Pour que Δ et Δ' se coupent, il faut et il suffit que m et m' soient en ligne droite avec la trace I de OP sur le plan R; soit I' l'homologue, dans la figure (m'), du point I considéré comme appartenant à la figure (m) : $\mathrm{I}m$ et $\mathrm{I}'m'$ sont deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques; le lieu des points m' pour lesquels mm' passe en I est donc une conique passant par I et I'. Le lieu correspondant de Δ' est un cône du second degré passant par OP; le lieu de Δ est aussi un cône du second degré contenant OP : par suite, le lieu du point commun aux droites Δ et Δ' qui se coupent est la courbe commune à ces deux cônes, c'est-à-dire une cubique gauche passant en O et P. Cette cubique passe aussi évidemment aux pieds des normales menées de P à S, et aux points à l'infini sur les axes de la quadrique : *c'est la cubique équilatère aux pieds des normales.*

Ce mode de génération montrant que cette cubique ne change pas si l'on remplace S par une surface homothétique et concentrique, on en conclut que les normales issues d'un point P, à des quadriques homothétiques et concentriques, forment un cône du second degré contenant la droite qui joint P au centre des quadriques et les parallèles menées par P à leurs axes, et que les pieds de ces normales appartiennent à une même cubique gauche.