NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Mouvement d'un corps autour d'un point fixe, avec forces ; cas où l'ellipsoïde d'inertie reste tangent à un plan fixe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 225-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__225_1>

[R3aα]

MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN POINT FIXE, AVEC FORCES; CAS OÙ L'ELLIPSOÏDE D'INERTIE RESTE TANGENT A UN PLAN FIXE;

Par M. G. FONTENÉ.

Théorème. — *Un corps étant mobile autour d'un point fixe* O, *et ce corps étant soumis à des forces extérieures, si le moment résultant* OS *de ces forces extérieures conserve une direction fixe pendant le mouvement du corps, et si, au début du mouvement, le moment résultant* $(O\sigma)_0$ *des quantités de mouvement a la même direction, le moment résultant* $O\sigma$ *des quantités de mouvement conserve indéfiniment cette direction* OS, *la force vive* 2T *est proportionnelle au carré σ^2 du moment $O\sigma$, et l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O roule sans glissement sur un plan fixe, perpendiculaire à la direction des moments résultants OS et $O\sigma$, et dont la distance au point O est*

$$\frac{\sqrt{2T}}{\sigma}.$$

1° Le théorème des moments des quantités de mouvement consiste en ceci : la vitesse absolue du point σ est parallèle et égale à OS; dans les conditions indiquées, la direction $O\sigma$ reste invariable.

2° En écrivant le parallélisme des directions OS et $O\sigma$ dans le système ordinaire d'axes mobiles (axes principaux d'inertie en O), on a les relations

$$\frac{A\dfrac{dp}{dt}-(B-C)qr}{Ap}=\frac{B\dfrac{dq}{dt}-(C-A)rp}{Bq}=\ldots\left(=\frac{\overline{OS}}{\overline{O\sigma}}\right);$$

on en déduit

$$\frac{Ap\dfrac{dp}{dt}+Bq\dfrac{dq}{dt}+\ldots}{Ap^2+Bq^2+Cr^2}=\frac{A^2p\dfrac{dp}{dt}+B^2q\dfrac{dq}{dt}+\ldots}{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2},$$

ou

$$\frac{d.2T}{2T}=\frac{d\sigma^2}{\sigma^2},$$

d'où

$$\frac{2T}{\sigma^2}=\text{const.};$$

on a une intégrale des équations du problème.

3° Considérons alors l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O, et soit OM le demi-diamètre dirigé suivant l'axe instantané de rotation dans le sens OI.

Avec les notations habituelles, les coefficients directeurs de la normale en M sont $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $\frac{z}{c^2}$, ou Ap, Bq, Cr, de sorte que la normale en M est parallèle à la direction $O\sigma$; par suite, dans le cas actuel, cette normale a une direction fixe, $O\sigma$ ou OS.

Les coordonnées à l'origine du plan tangent en M sont $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$, $\frac{c^2}{z}$; on a donc pour la distance d du point O à ce plan tangent

$$\frac{1}{d^2} = \frac{x^2}{a^4} + \ldots + \ldots = \frac{\mathrm{OM}^2}{\omega^2}\left(\frac{p^2}{a^4}\right) + \ldots$$
$$= \frac{1}{\mathrm{M}\,\omega^2}(\mathrm{A}^2 p^2 + \ldots) = \frac{\sigma^2}{2\mathrm{T}};$$

par suite, dans le cas actuel, cette distance est constante et a pour valeur $\frac{\sqrt{2\mathrm{T}}}{\sigma}$.

Ainsi l'ellipsoïde d'inertie reste ici tangent à un plan fixe, perpendiculaire à la direction $O\sigma$ et dont la distance au point O est $\frac{\sqrt{2\mathrm{T}}}{\sigma}$, le point de contact M étant le pôle instantané de rotation.

4° Comme le point M possède à chaque instant une vitesse nulle, l'ellipsoïde d'inertie roule sans glissement sur le plan en question.

Remarque. — Avec $\mathrm{OS} \neq 0$, la vitesse ω de la rotation instantanée n'est pas proportionnelle à OM, la projection de la rotation instantanée sur la direction $O\sigma$ n'est pas constante.

On a

$$\frac{\omega}{\mathrm{OM}} = \sqrt{2\mathrm{T}} = \sigma \times d,$$

avec

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mathrm{S}.$$