Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 50-52
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__50_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2222.

(1914, p. 335.)

Soient (E) *une ellipse ayant pour axes* Ox *et* Oy, M *un point de cette ellipse. La tangente en* M *à* (E) *coupe* Ox *et* Oy *en* α *et* β ; *la normale les coupe en* α' *et* β'. *Soient* (P) *la parabole tangente en* O *à* Ox *et touchant les parallèles à la normale et à la tangente menées respectivement par* α *et* α' ; (P′) *la parabole analogue, obtenue en remplaçant* Ox *par* Oy.

1° *Démontrer que les paraboles* (P) *et* (P′) *ont même axe et même foyer;*

2° *Donner une construction géométrique simple de l'axe et du foyer communs.*

F. Balitrand.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

La construction classique du foyer d'une parabole dont on connaît trois tangentes, et le point de contact situé sur l'une d'elles, montre que le foyer commun des paraboles (P) et (P′) est le point d'intersection F des cercles $O\alpha\beta$, $O\alpha'\beta'$. La direction commune de l'axe de ces paraboles est la symétrique de la droite OF par rapport à Ox ou Oy.

Autre solution par l'auteur.

2226.

(1914, p. 336.)

On donne une ellipse (ou une hyperbole) et un cercle ayant le même centre; trouver le lieu du point d'intersection des tangentes menées à la conique par les extrémités d'un diamètre du cercle.

T. Ono.

SOLUTION.

Par M. R. BOUVAIST.

Soit O le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole, le lieu cherché est le lieu de l'intersection des tangentes menées à cette courbe par un point M du cercle avec le diamètre conjugué de OM.

Soient $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$ un point du cercle, nous sommes ramenés à éliminer φ entre les deux équations

$$\left(\frac{R^2\cos^2\varphi}{a^2} \pm \frac{R^2\sin^2\varphi}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left[\frac{Rx\cos\varphi}{a^2} \pm \frac{Ry\sin\varphi}{b^2} - 1\right]^2 = 0,$$

$$\frac{x}{a^2\sin\varphi} \pm \frac{y}{b^2\cos\varphi} = 0;$$

il vient

$$\frac{x^2(R^2 \mp b^2)}{a^2} \pm y^2\frac{(R^2 - a^2)}{b^2} - R^2 = 0.$$

Le lieu est donc une conique, qui coïncide avec le cercle orthoptique si $R^2 = a^2 \pm b^2$.

2227.

(1914, p. 336.)

Le lieu du point d'intersection des normales menées aux extrémités des diamètres conjugués d'une ellipse est une courbe du sixième ordre.

T. ONO.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Nous obtiendrons l'équation du lieu en éliminant φ entre les deux équations

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0,$$

$$\frac{ax}{\sin\varphi} + \frac{by}{\cos\varphi} + c^2 = 0;$$

il vient

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = \frac{c^4}{2}(a^2x^2 - b^2y^2)^2.$$

Le lieu est la projection d'une rosace à quatre branches.

2228

(1914 p 336)

Étant donnes deux faisceaux de cercles φ et φ', on associe à chaque cercle du faisceau φ le cercle du faisceau φ' qui lui est orthogonal Demontrer que le lieu du centre du cercle qui passe par leurs points d'intersection et par un point fixe du plan est une conique.

R. GOORMAGHTIGH

SOLUTION GEOMETRIQUE

Par M R BOUVAIST

Soient A et B, A' et B' les points de base des faisceaux φ et φ', O l'intersection des droites AB et A'B'. Soient Γ et Γ' deux cercles associes leur axe radical enveloppe une conique tangente a AB et A'B', soit en effet M le point de rencontre de cette droite avec AB, il existe un cercle Γ et un seul passant par A' et B' et orthogonal au cercle de centre M et de rayon $\sqrt{MA \cdot MB}$, il n'existe de même qu'un cercle Γ orthogonal a Γ. L'axe radical des cercles Γ et Γ' ainsi determines passera par M, comme il est unique, les points de rencontre de cette droite avec AB et A B' se correspondent homographiquement, son enveloppe est donc une conique Une transformation par inversion montre donc que l'enveloppe d'un cercle passant par l'intersection de Γ et Γ' et un point du plan est une inverse de conique, son centre decrit par suite la polaire reciproque de cette derniere conique