

Une question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16 (1916), p. 134-137

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__134_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE QUESTION DE LICENCE ;

PAR UN ABONNE.

Les axes étant rectangulaires, on donne la parabole représentée par l'équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

En un point (x, y) de la parabole on mène la tangente, et une droite D symétrique de la tangente, par rapport à la parallèle à l'axe OX qui passe par M.

1° Déterminer les coordonnées du point M' où la droite D rencontre la parabole.

2° Déterminer les coordonnées du point C, milieu de MM', et trouver le lieu du point C, quand le point M décrit la parabole.

3° Trouver l'enveloppe d'une droite CN, passant par C et parallèle à la tangente en M à la parabole.

4° N étant le point de contact de la droite CN avec son enveloppe, démontrer que la droite NM passe par le sommet O de la parabole.

(Montpellier, juin 1913.)

(Nouvelles Annales, 1915, p. 39.)

La droite D est la corde commune à la parabole et à son cercle osculateur en M.

Soit T le point de rencontre des tangentes en M et M' à la parabole.

Désignons par M_1 le symétrique du point M par rapport à l'axe de la parabole. La tangente à cette courbe en M_1 est parallèle à la corde commune MM' . De plus, d'après un théorème bien connu, la droite TC passe en M_1 et a son milieu en ce point.

Si donc on appelle μ , μ' et γ les projections sur OX des points M , M' et C et si N_1 est le point de rencontre, situé sur l'axe, des tangentes à la parabole en M et M_1 , on voit que

$$(1) \quad C\gamma = M\mu, \quad M'\mu' = 3M\mu;$$

ce qui donne les ordonnées des points C et M' en fonction de celle de M .

On a ensuite, puisque dans la parabole la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact, $O\mu = ON_1$. Appelons P le point où la droite D rencontre l'axe OX , nous aurons

$$\mu P = \mu N_1 = 2O\mu;$$

d'où l'on déduit sans peine, pour les abscisses des points C et M' ,

$$(2) \quad O\gamma = 5O\mu, \quad O\mu' = 9O\mu.$$

Des formules (1) et (2) il résulte que le lieu du point C est une parabole de même sommet et de même axe que la parabole donnée et de paramètre cinq fois plus petit.

Désignons par C_1 et C_2 les points où la droite CN rencontre l'axe et la tangente au sommet de la parabole. Élevons en C_2 une perpendiculaire à CN et soit φ le point où elle rencontre OX ; je dis que ce point est fixe.

En effet, menons en M la normale à la parabole. Elle est perpendiculaire à CN et rencontre OX en Q . Les

deux triangles MN_1Q , $C_1C_2\varphi$ sont semblables et l'on a

$$\frac{O\varphi}{\mu Q} = \frac{OC_1}{\mu N_1} = \frac{7 \cdot O\mu}{2 \cdot O\mu} = \frac{7}{2}.$$

Mais μQ n'est autre que la sous-normale, c'est-à-dire le paramètre p . Donc le point φ est fixe et l'enveloppe de CN est une parabole ayant ce point pour foyer et Oy pour tangente au sommet; autrement dit, une parabole homothétique à la proposée; le centre d'homothétie étant le sommet O et le rapport d'homothétie -7 .

Les droites CN et MN_1 étant deux tangentes parallèles de ces paraboles homothétiques, leurs points de contact sont en ligne droite avec le centre O ; par suite, le point N se trouve sur la droite OM .

On peut ajouter que le lieu du point T et l'enveloppe de la droite MM' sont également deux paraboles. D'ailleurs ces deux courbes sont polaires réciproques par rapport à la parabole donnée.

En ce qui concerne le point T , il est symétrique du point M par rapport au point N_1 . Ses coordonnées sont $-3O\mu$, $-M\mu$. Il décrit donc une parabole homothétique inverse de la proposée par rapport au sommet O avec un rapport d'homothétie égal à $-\frac{1}{3}$. La tangente en T à cette courbe est la droite PT , en vertu de la propriété fondamentale de la sous-tangente à la parabole.

Soit R le point où D rencontre la tangente au sommet. La perpendiculaire à D en ce point coupe Ox en f . Les deux triangles RfP , $C_1C_2\varphi$ sont semblables et donnent

$$\frac{Of}{O\varphi} = \frac{OP}{OC_1} = \frac{3}{7}.$$

Comme $O\varphi = \frac{7}{2}p$, on a

$$Of = \frac{3}{2}p.$$

Le point f est fixe et l'enveloppe de D est une parabole ayant ce point pour foyer et O pour sommet. Comme elle est homothétique de la parabole donnée par rapport à O et que D est parallèle à la tangente M_1N_1 , le point où D touche son enveloppe est sur la droite OM_1 .