Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 271-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__271_1>

CORRESPONDANCE.

M. G. **Fontené**. — *Sur deux propositions de Laguerre.* — I. *Le cercle pédal d'un point fixe par rapport aux triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre a pour enveloppe une anallagmatique du quatrième ordre.*

Laguerre a énoncé ce théorème (*N. A.*, 1879, p. 205) sans en donner la démonstration.

II. *On considère une ellipse; soient u et v les distances des foyers de l'ellipse au centre du cercle, de sorte que les puissances de ces foyers par rapport au cercle sont $P = u^2 - R^2$, $P' = v^2 - R^2$. Les conditions de fermeture pour un triangle ou un quadri-*

latère circonscrit à l'ellipse et inscrit au cercle sont respectivement

$$PP' = 4b^2R^2,$$

$$\frac{b^2R^2}{PP'} + \frac{a^2}{P+P'} = \frac{1}{4}.$$

Cas où l'ellipse est remplacée par un cercle.

Les démonstrations de Laguerre (*N. A.*, 1879, p. 246 et 252) sont très indirectes; il donne la seconde relation entre u et v sous une forme moins simple, sans introduire P et P'.

M. **G. Fontené.** — *Au sujet de la question* 711. — De cette question posée par Faure (1864, p. 443), les deux premières parties ont été résolues (1865, p. 78, et 1868, p. 443). En ce qui concerne la troisième partie, non résolue, Faure signale une correction (1881, p. 143); on doit lire : puissance changée de signe. Il ajoute que le théorème figure dans son Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques. La quatrième partie est manifestement fausse; l'auteur dit qu'une équation de la forme

$$x^m f(a) + x^{m-1} f(a+1) + x^{m-2} f(a+2) + \ldots = 0,$$

où f désigne une fonction algébrique, a toujours des racines imaginaires. Indépendamment du cas $m = 1$, il s'ensuivrait, pour $m = 2$, que l'équation

$$ax^2 + (a+1)x + (a+2) = 0$$

a toujours ses racines imaginaires, c'est-à-dire que l'on a toujours

$$(a+1)^2 - 4a(a+2) < 0,$$

ou

$$3a^2 + 6a - 1 > 0;$$

or ce trinome a des racines et peut être négatif.

M. E.-N. Barisien. — *Au sujet du problème de Pappus généralisé.* — M. J. Joffroy a résolu très heureusement ce problème dans le cas d'un point P de la bissectrice d'un angle ω (1916, p. 168-171).

Je me permets d'ajouter deux remarques qui paraissent avoir leur intérêt. Je conserve les notations de M. Joffroy :

1° Si $l > 4a \sin \frac{\omega}{2}$, on aura quatre solutions réelles :

Si $l = 4a \sin \frac{\omega}{2}$, alors SS′ est perpendiculaire à OP, et le problème comporte trois solutions réelles (l'une étant double).

Si $l < 4a \sin \frac{\omega}{2}$, le problème n'a plus que deux solutions réelles.

2° On peut aussi traiter le problème en prenant pour inconnues $PS = X$, $PS' = Y$ (*voir* la figure, *loc. cit.*).

On a tout d'abord

$$(A) \qquad X + Y = l.$$

Le triangle PAS donne

$$X^2 = a^2 + \overline{AS}^2 - 2a \, AS \cos\omega.$$

Or, les triangles semblables PAS et PA′S′ donnent

$$\frac{AS}{a} = \frac{X}{Y}, \qquad AS = \frac{aX}{Y}.$$

Par conséquent

$$X^2 = a^2 + \frac{a^2 X^2}{Y^2} - 2a^2 \frac{X}{Y} \cos\omega,$$

ou

$$(B) \qquad X^2 Y^2 = a^2(X^2 + Y^2) - 2a^2 XY \cos\omega.$$

En remarquant que

$$X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY = l^2 - 2XY,$$

on a l'équation en XY

$$X^2 Y^2 = a^2(l^2 - 2XY) - 2a^2 XY \cos\omega,$$

ou

$$(C) \qquad X^2 Y^2 + 2a^2(1 + \cos\omega)XY - a^2 l^2 = 0.$$

Il en résulte

$$(D) \qquad XY = -a^2(1 + \cos\omega) \pm a\sqrt{a^2(1 + \cos\omega)^2 + l^2}.$$

On est donc ramené à résoudre et à construire X et Y connaissant X + Y et XY par (A) et (D).

La liaison entre cette solution et celle de M. Joffroy se fait par les relations suivantes :

$$OS = x = a - AS = a + \frac{aX}{Y}, \qquad OS' = y = a + A'S' = a + \frac{aY}{X};$$

$$x = a\,\frac{(X + Y)}{Y} = \frac{al}{Y}, \qquad y = a\,\frac{(X + Y)}{X} = \frac{al}{X};$$

$$xy = \frac{a^2 l^2}{XY}, \qquad x + y = \frac{al^2}{XY};$$

$$XY = \frac{a^2 l^2}{xy}, \qquad XY = \frac{al^2}{x + y}.$$

L'expression (D) peut encore s'écrire

$$XY = -2a^2 \cos\frac{2\omega}{2} \pm a\sqrt{4a^2 \cos\frac{4\omega}{2} + l^2}.$$