J.-B. POMEY

Nouvelle démonstration d'un théorème d'Abel sur les séries

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 379-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__379_1>

[D2a]

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THEORÈME D'ABEL SUR LES SÉRIES;

PAR M. J.-B. POMEY.

Remarque préliminaire. — Soit, dans le plan, un ensemble (A) de points A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ... contenus dans un cercle C de rayon R; si je forme l'ensemble (B) des points $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$, ... homologues respectivement des points A_0, A_1, ..., A_n, ... dans une transformation homothétique opérée à partir d'un point P, situé à l'intérieur du cercle C, comme centre d'homothétie et avec un rapport de similitude λ inférieur à l'unité mais positif, la figure (B) est contenue dans un cercle C′ de rayon $R' = \lambda R$ et le cercle C′ est contenu à l'intérieur du cercle C; les deux figures coïncideraient, naturellement, si λ était égal à l'unité. Je dirai pour abréger que j'opère sur (A) la transformation $S_\lambda^P(A)$ et que j'obtiens l'ensemble (B). J'écrirai alors $S_\lambda^P(A) \equiv (B)$.

Énoncé. — Considérons une suite de vecteurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ en nombre infini, mais supposons que le plus grand des vecteurs

$$s_0 = u_0, \quad s_1 = u_0 + u_1, \quad s_2 = u_0 + u_1 + u_2 \ldots, \quad s_n = \Sigma(u_n) \ldots$$

demeure fini. Supposons que les nombres a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... soient une infinité de nombres positifs, rangés par ordre décroissant de façon que chacun d'eux soit tout au plus égal au précédent, mais tels cependant que, si l'on se donne un nombre ε aussi petit qu'on voudra, on puisse prendre n assez grand pour que tous les nombres à partir de a_n soient inférieurs à ε. Je dis que la série

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

est convergente.

Démonstration. — Soient B_0, B_1, B_2, ..., B_n, ... les extrémités des vecteurs s_0, s_1, s_2, ..., s_n, ... appliqués à l'origine, comme le seraient des forces. Je puis tracer un cercle C de rayon R assez grand pour contenir à son intérieur tous les points (B) de cet ensemble, en même temps que l'origine que j'appellerai Q. Je fais la transformation $S^{Q}_{a_0}(B)$ et j'obtiens les points B^0_0, B^0_1, B^0_2, ... Le premier B^0_0 est l'extrémité du vecteur $a_0 u_0$ et le vecteur B^0_{n-1}, B^0_n est égal à $a_0 u_n$. Ceci posé, je fais les opérations successives :

$$S^{a}_{a_0}(B_0 B_1 \ldots B_n \ldots) \equiv (B^0_0 B^0_1 B^0_2 \ldots B^0_n \ldots),$$

$$S^{B^0_0}_{\frac{a_1}{a_0}}(B^0_1 B^0_2 \ldots B^0_n \ldots) \equiv (B^1_1 B^1_2 B^1_3 \ldots B^1_n \ldots),$$

$$S^{B^1_1}_{\frac{a_2}{a_1}}(B^1_2 B^1_3 \ldots B'_n \ldots) \equiv (B^2_2 B^2_3 B^2_4 \ldots B^2_n \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S^{B^{n-1}_{n-1}}_{\frac{a_n}{a_{n-1}}}(B^{n-1}_1 B^{n-1}_{n+1} \ldots) \equiv (B^n_n B^n_{n+1} \ldots),$$

Les points B^0_0, B^0_1, B^0_2, ... sont compris à l'intérieur d'un cercle C_0 de rayon $R_0 = a_0 R$; les points B^1_1, B^1_2, B^1_3, ... sont compris à l'intérieur d'un cercle C_1 de rayon $R_1 = \frac{a_1}{a_0} R_0 = a_1 R$; les points B_2^2, B_3^2, ... sont compris à l'intérieur d'un cercle C_2 de rayon $R_2 = \frac{a_2}{a_1} R_1 = a_2 R$; les points B_n^n, B_{n+1}^n, ... sont compris à l'intérieur d'un cercle C_n de rayon $R_n = a_n R$. Or, le cercle C enveloppe le cercle C_0 qui enveloppe le cercle C_1 qui enveloppe le cercle C_2, ..., qui enveloppe le cercle C_n dont le rayon tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc les centres d'homothétie successifs Q, B_0^0, B_1^1, B_2^2, ..., B_n^n, ... qui sont compris respectivement à l'intérieur de ces divers cercles successifs tendent vers un point limite Σ bien déterminé. Maintenant, examinons les valeurs de $Q B_0^0$, de $Q B_1^1$, ... et de $Q B_n^n$. Tout d'abord $Q B_0^0$ est un vecteur égal à $a_0 u_0$, $B_0^0 B_1^0$ est un vecteur égal à $a_0 u_1$, donc $B_0^0 B_1^1$ est un vecteur égal à

$$\frac{a_1}{a_0} \times a_0 u_1 = a_1 u_1$$

et $Q B_1^1$ est, par suite, égal à

$$a_0 u_0 + a_1 u_1.$$

D'une façon générale, je dis que le vecteur $Q B_n^n$ est égal à

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n,$$

car la même formule subsiste quand on change n en $n+1$. En effet, il suffit de considérer les vecteurs $B_n^0 B_{n+1}^0$, $B_n^1 B_{n+1}^1$, $B_n^2 B_{n+1}^2$, ... pour voir qu'ils sont égaux respectivement à

$$a_0 u_{n+1}, \quad a_1 u_{n+1}, \quad a_2 u_{n+1}, \quad \ldots;$$

puis, quand nous prenons B_n^n pour centre d'homothétie, nous avons enfin

$$B_n^n B_{n+1}^{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} B_n^n B_{n+1}^n = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n u_{n+1} = a_{n+1} u_{n+1},$$

ce qui établit la loi et prouve en même temps que la limite de QB_n^n ou $\Sigma a_n u_n$ est le vecteur bien déterminé $Q\Sigma$.