J.-B. POMEY

Généralisation des quantités imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 501-505

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__501_0>

[B12a]

GÉNÉRALISATION DES QUANTITÉS IMAGINAIRES;

Par M. J.-B. POMEY.

On sait que les quantités imaginaires peuvent être considérées comme les résidus des fonctions entières par rapport au module $1 + x^2$.

Soit de même la fonction

$$x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3,$$

dont les racines sont ω_1, ω_2, ω_3, de sorte que l'on a

$$(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) \equiv x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3,$$

identiquement. J'appellerai *quantité imaginaire* toute fonction entière de l'indéterminée x, à la condition d'admettre en même temps l'équivalence de ladite fonction avec le reste de sa division par

$$(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3).$$

De cette façon, les quantités à considérer seront des trinomes du second degré en x. La somme de

$$M_1 x^2 + N_1 x + P_1$$

et de

$$M_2 x^2 + N_2 x + P_2$$

sera évidemment

$$(M_1 + M_2) x^2 + (N_1 + N_2) x + P_1 + P_2.$$

Le produit de deux imaginaires se définira naturellement par l'identité

$$Mx^2 + Nx + P \equiv (M_1x^2 + N_1x + P_1)(M_2x^2 + N_2x + P_2) \\ - \lambda(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3),$$

identité au moyen de laquelle il est facile de déterminer les valeurs à donner à MN et P, sans parler de λ, qui ne nous intéresse pas.

On obtiendra ces valeurs de la façon la plus simple en faisant x égal successivement à ω_1, à ω_2 et à ω_3. Et l'on aura les égalités ci-après où l'on a mis f_{1,ω_1} pour $M_1\omega_1^2 + N_1\omega_1 + P$ et pris pour les quantités similaires des notations analogues,

$$(1) \qquad \begin{cases} M\omega_1^2 + N\omega_1 + P = f_{1\omega_1}f_{2\omega_1}, \\ M\omega_2^2 + N\omega_2 + P = f_{1\omega_2}f_{2\omega_2}, \\ M\omega_3^2 + N\omega_3 + P = f_{1\omega_3}f_{2\omega_3}. \end{cases}$$

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 & 1 \\ \omega_2^2 & \omega_2 & 1 \\ \omega_3^2 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3).$$

On aura, par exemple,

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} f_{1\omega_1} & f_{2\omega_1} & \omega_1 & 1 \\ f_{1\omega_2} & f_{2\omega_2} & \omega_2 & 1 \\ f_{1\omega_3} & f_{2\omega_3} & \omega_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

On remarquera que ce déterminant s'annule pour $\omega_1 = \omega_2$ ou ω_3 et pour $\omega_2 = \omega_3$; il doit donc être divisible par Δ et, par suite, M est une fonction entière de ω_1, ω_2, ω_3. D'ailleurs, si l'on échange ω_1 et ω_2, par exemple, ce déterminant change de signe, et il en est de même de Δ, tout en gardant même valeur absolue. C'est donc une fonction symétrique des racines ω_1, ω_2, ω_3. Par suite, M est une fonction entière symétrique de ω_1, ω_2, ω_3; donc elle s'exprimera d'une façon rationnelle et entière en fonction de s_1, s_2, s_3. Ajoutons que si ces quantités sont des nombres entiers, il en sera de même de M, pourvu que $M_1 N_1 P_1$, $M_2 N_2 P_2$ soient aussi entiers.

Un raisonnement analogue s'applique à chacune des quantités N et P.

D'ailleurs, on peut vérifier par le calcul ce qui vient d'être dit : par exemple, de l'équation

$$\omega^3 = s_1\omega^2 - s_2\omega + s_3$$

on tire

$$\omega^4 = s_1\omega^3 - s_2\omega^2 + s_3\omega\,;$$

d'où

$$\omega^4 = (s_1^2 - s_2)\omega^2 + (s_3 - s_1 s_2)\omega + s_1 s_3,$$

ce qui montre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \omega_1^4 & \omega_1 & 1 \\ \omega_2^4 & \omega_2 & 1 \\ \omega_3^4 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (s_1^2 - s_2)\omega_1^2 + (s_3 - s_1 s_2)\omega_1 + s_1 s_3 & \omega_1 & 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & . \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & . \end{vmatrix}.$$

est égal à $(s_1^2 - s_2)\Delta$.

On obtiendrait des résultats analogues pour les divers déterminants à considérer au cours du calcul du déterminant qui figure au numérateur de M.

Nous aurons donc, en multipliant les équations (1),

$$(2)\quad \begin{aligned}&(M\omega_1^2 + N\omega_1 + P)(M\omega_2^2 + N\omega_2 + P)(M\omega_3^2 + N\omega_3 + P)\\ &\quad = f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{1\omega_3} \times f_{2\omega_1} f_{2\omega_2} f_{2\omega_3}.\end{aligned}$$

Si l'on appelle *module* d'une quantité imaginaire $f_{1\omega}$ la racine carrée (ou cubique si l'on veut) de $f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{1\omega_3}$, on pourra énoncer cette relation en disant que le module d'un produit est égal au produit des modules.

Il est facile d'exprimer le produit

$$(M\omega_1^2 + N\omega_1 + P)(M\omega_2^2 + N\omega_2 + P)(M\omega_3^2 + N\omega_3 + P),$$

en fonction de s_1, s_2, s_3. Je l'écrirai d'abord sous la forme

$$M^3(\omega_1-\alpha)(\omega_1-\beta)(\omega_2-\alpha)(\omega_2-\beta)(\omega_3-\alpha)(\omega_3-\beta),$$

en posant

$$\alpha+\beta=-\frac{N}{M}, \qquad \alpha\beta=\frac{P}{M},$$

ou sous la forme équivalente,

$$\begin{aligned}
&M^3(\alpha^3-s_1\alpha^2+s_2\alpha-s_3)(\beta^3-s_1\beta^2+s^2+s_2\beta-s_3)\\
&=M^3(\alpha^3\beta^3-s_1\beta^3\alpha^2+s_2\beta^3\alpha-s_3\beta^3\\
&\qquad -s_1\alpha^3\beta^2+s_1^2\alpha^2\beta^2-s_1s_2\alpha\beta^2+s_1s_3\beta^2\\
&\qquad +s_2\alpha^3\beta-s_1s_2\alpha^2\beta+s_2^2\alpha\beta-s_2s_3\beta\\
&\qquad\qquad -s_3\alpha^3+s_1s_3\alpha^2-s_2s_3\alpha+s_3^2)\\
&=M^3\{\alpha^3\beta^3-s_1\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)+s_2\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]\\
&\qquad -s_3[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]+s_1^2\alpha^2\beta^2-s_1s_2\alpha\beta(\alpha+\beta)\\
&\qquad +s_1s_3[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+s_2^2\alpha\beta-s_2s_3(\alpha+\beta)+s_3^2\}\\
&=M^3\left[\frac{P^3}{M^3}+s_1\frac{P^2}{M^2}\frac{N}{M}+s_2\frac{P}{M}\left(\frac{N^2}{M^2}-2\frac{P}{M}\right)\right.\\
&\qquad +s_3\left(\frac{N^3}{M^3}-3\frac{P}{M}\frac{N}{M}\right)+s_1^2\frac{P^2}{M^2}+s_1s_2\frac{P}{M}\frac{N}{M}\\
&\qquad \left.+s_1s_3\left(\frac{N^2}{M^2}-2\frac{P}{M}\right)+s_2^2\frac{P}{M}+s_2s_3\frac{N}{M}+s_3^2\right]\\
&=P^3+s_1P^2N+s_2P(N^2-2PM)+s_3(N^3-3PMN)\\
&\quad +s_1^2P^2M+s_1s_2PNM+s_1s_3(N^2-2PM)M\\
&\quad +s_2^2PM^2+s_2s_3NM^2+s_3^2M^3,
\end{aligned}$$

ou, en ordonnant,

$$\begin{aligned}
&s_3^2M^3+s_3N^3+P^3+s_2s_3M^2N+(s_2^2-2s_1s_3)M^2P\\
&\quad +s_1s_3N^2M+s_2N^2P+(s_1^2-2s_2)P^2M+s_1P^2N\\
&\quad +(s_1s_2-3s_3)MNP.
\end{aligned}$$

Appelons cette fonction de MNP, $\varphi(M, N, P)$. Supposons que s_1, s_2, s_3 soient des entiers. Il résulte de ce qui vient d'être exposé que si deux nombres entiers sont de la forme

$$A_1 = \varphi(M_1 N_1 P_1),$$
$$A_2 = \varphi(M_2 N_2 P_2),$$

on aura

$$A_1 A_2 = \varphi(MNP),$$

M, N, P étant des entiers comme $M_1 N_1 P_1$ et $M_2 N_2 P_2$. En effet, dans l'égalité (2), on aura

$$\varphi(M_1 N_1 P_1) = f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{1\omega_3},$$
$$\varphi(M_2 N_2 P_2) = f_{2\omega_1} f_{2\omega_2} f_{2\omega_3},$$

et, par suite,

$$A_1 A_2 = \varphi(MNP).$$

Un cas particulier intéressant, c'est celui dans lequel ω_1, ω_2, ω_3 sont les racines cubiques de l'unité; on a alors $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = 1$ et la fonction φ devient

$$\varphi = M^3 + N^3 + P^3 - 3MNP = \begin{vmatrix} M & N & P \\ P & M & N \\ N & P & M \end{vmatrix}.$$

On peut remarquer que les trois facteurs dont le produit constitue $\varphi(M, N, P)$ dans le cas général sont de la forme

$$\lambda^2 M + \lambda N + P.$$

Chacun de ces facteurs linéaires égalé à zéro représente une tangente à la conique

$$N^2 - 4MP = 0.$$

Ce qui caractérise φ, c'est donc que cette forme soit décomposable en trois facteurs représentant des tangentes à cette conique, les trois valeurs de λ correspondantes étant racines d'une équation

$$x^3 - s_1 x^2 - s_2 x - s_3 = 0$$

à coefficients entiers.