NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Points d'intersection d'une surface du quatrième ordre avec les arêtes d'un tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 78-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__78_1>

[$L^2 14$]

POINTS D'INTERSECTION D'UNE SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE AVEC LES ARÊTES D'UN TÉTRAÈDRE;

PAR M. G. FONTENE.

1. THÉORÈME. — *Les vingt-quatre points d'intersection d'une surface du quatrième ordre avec les*

six arêtes d'un tétraèdre vérifient trois conditions indépendantes de la surface considérée; trois de ces points sont déterminés par les vingt et un autres.

Une surface du quatrième ordre dépend de paramètres en nombre $\frac{5 \times 6 \times 7}{6} - 1$, ou 34. Or, le tétraèdre étant pris comme tétraèdre de référence, on ne modifie pas les traces de la surface sur les arêtes en modifiant les termes

$$\begin{aligned} & yzt(by + cz + dt) \\ & \quad + xzt(a'x + c'z + d't) + \ldots + \ldots + kxyzt, \end{aligned}$$

qui sont au nombre de 13. Le nombre des paramètres dont dépendent les vingt-quatre points en question est donc 21; ces points vérifient trois conditions.

2. Corollaire I. — *Si une surface du quatrième ordre coupe les six arêtes d'un tétraèdre en vingt-quatre points dont douze appartiennent à une quadrique* S, *les douze autres sont aussi à une quadrique* S'.

En effet, par neuf des douze points restants on peut faire passer une quadrique S'; les deux quadriques S et S' forment une S_4 qui doit contenir les trois derniers points; la quadrique S' passe donc par ces points. Les équations des deux quadriques étant $S = 0$, $S' = 0$, l'équation générale des surfaces considérées est

$$S . S' + yzt(by + cz + dt) + \ldots + \ldots + \ldots + k . xyzt = 0,$$

avec 31 paramètres; *a priori* la surface doit vérifier trois conditions et dépend par suite de 31 paramètres.

Les douze premiers points vérifient trois conditions, qui sont, par exemple, une condition dans chacune des faces DBC, DCA, DAB; le théorème impose trois conditions aux douze derniers points, et il se trouve que ce sont trois conditions *intrinsèques*, analogues à celles que vérifient les douze premiers points.

3. Cas particulier. — *Par les douze points de rencontre des arêtes d'un tétraèdre et d'une quadrique* S, *on peut (de différentes façons) faire passer quatre plans* α, β, γ, δ, *chacun de ces plans étant mené par trois points situés sur les arêtes issues d'un même sommet; les quatre droites d'intersection de ces plans avec les plans des faces opposées du tétraèdre appartiennent à un même hyperboloïde (condition triple).*

Ces quatre plans forment en effet une S_1 et les douze points que le corollaire I place sur une quadrique S' sont trois à trois en ligne droite. — Les traces des plans α, β, γ sur le plan ABC rencontrent BC, CA, AB en trois points qui sont sur une droite : cette droite est la seconde génératrice de l'hyperboloïde dans le plan ABC.

Ce fait et le fait corrélatif ont été donnés par Chasles (*Aperçu historique*, note XXXII).

3*a*. Si la quadrique est tangente aux six arêtes du tétraèdre, on a ceci : les points de contact étant M, N, P, M', N', P', les trois premiers sur les arêtes issues de D, et les plans tangents en ces points étant m, n, p, m', n', p', les quatre droites (MNP, ABC), (MN'P', DBC), ... sont à un hyperboloïde, les quatre droites qui joignent le point (m', n', p') au point D, le point (m', n, p) au point A, ..., sont à un hyperboloïde. On peut dire : dans l'octaèdre hexagonal dont les sommets sont M, N_1, P, M′, ..., les quatre droites d'intersection des plans des faces opposées sont à un hyperboloïde; dans l'hexaèdre octogonal dont les plans des faces sont m, n, p, m', ..., les quatre diagonales sont à un hyperboloïde. — L'axe d'homologie du triangle M′N′P′ et du triangle ABC est la seconde génératrice du premier hyperboloïde dans le plan ABC; l'axe d'homologie du trièdre mnp et du trièdre (a, b, c) est la seconde génératrice du second hyperboloïde issue de D.

3*b*. Si la quadrique est circonscrite (ou inscrite) au tétraèdre, le fait indiqué au n° 3 (ou le fait corrélatif) donne ceci : Étant pris quatre points A, B, C, D sur une quadrique, et les plans tangents en ces points étant α, β, γ, δ, les quatre droites d'intersection des plans δ et ABC, α et DBC, ..., sont à un hyperboloïde; les quatre droites qui joignent le point D au point (α, β, γ), ..., sont à un hyperboloïde. — On détermine comme au n° 3 les secondes génératrices situées dans les plans ABC, ..., ou issues des points (α, β, γ), ...

Ces faits ont été signalés d'abord par Steiner et Bobillier (*Annales de Gergonne*, t. XVIII).

3*c*. Les deux cas particuliers (3*a*) et (3*b*) dépendent encore du théorème général donné par Chasles pour deux tétraèdres qui sont polaires réciproques par rapport à une quadrique : les droites d'intersection des plans des faces correspondantes sont à un même hyperboloïde, les droites qui joignent les sommets correspondants sont à un même hyperboloïde (*Annales de Gergonne*, t. XIX).

4. Corollaire II. — *Si une surface du quatrième*

ordre est doublement tangente à chacune des six arêtes d'un tétraèdre, les douze points de contact sont à une quadrique.

Le mot *corollaire* indique ici, non une conséquence directe du théorème, mais un fait intimement lié au théorème; les douze points de contact doivent vérifier trois conditions. Si l'on suppose qu'ils sont à une quadrique, l'équation de cette quadrique étant $S = 0$, l'équation de la surface est

$$S^2 + yzt(by + cz + dt) + \ldots + \ldots + \ldots + k.xyzt = 0,$$

avec 22 paramètres; or, *a priori*, la surface doit vérifier douze conditions et dépendre par suite de 22 paramètres. Ce raisonnement est d'ailleurs insuffisant.

On a un fait corrélatif : *les plans tangents à la surface aux douze points où elle touche les arêtes sont tangents à une quadrique.*

5. Cas particulier. — Si deux quadriques touchent l'une et l'autre les six arêtes d'un tétraèdre, les douze points de contact sont à une même quadrique, les douze plans tangents en ces points sont tangents à une même quadrique (Steiner, *Annales de Gergonne*, t. XIX).

Cet énoncé est, si l'on veut, une réciproque de celui que l'on obtient en supposant que, dans le corollaire I, la surface du quatrième ordre est une quadrique double.