Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 180-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__180_1>

CORRESPONDANCE.

M. **F. Balitrand.** — *A propos d'une question de Cinématique.* — La question de cinématique posée par M. Faucheux (*N. A.*, 1917, p. 60) renferme dans son énoncé une petite inexactitude due à une transposition des cas particuliers I et II. C'est ce qui nous a poussé, en même temps que l'intérêt propre du problème, à en donner la solution ci-dessous. Nous conservons les notations de M. Faucheux.

Soient de plus O un point de la trajectoire T et OP l'accélération en ce point. Les composantes de OP suivant la tangente et la normale en O à T sont

$$OA = v\frac{dv}{ds}, \qquad OB = \frac{v^2}{\rho}.$$

Les triangles semblables OCM, OBP donnent

$$\frac{CM}{BP} = \frac{OC}{OB};$$

et puisque, par hypothèse,

$$CM = n\,CC_1 = n\rho_1 = n\rho\frac{d\rho}{ds} \qquad (n = \text{const.}),$$

on a

$$n\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dv}{v};$$

d'où

$$v = C\rho^n.$$

La réciproque se démontrerait en reprenant les calculs précédents en sens inverse.

Cas particuliers. — $n = 1$:

$$v = \frac{ds}{dt} = c\rho = c\,\frac{ds}{\varepsilon} \qquad (\varepsilon = c\,dt).$$

$n = -1$. — L'aire infinitésimale balayée par le rayon de courbure est égale à

$$d\sigma = \frac{1}{2}\,\rho\,ds = \frac{1}{2}\,\rho v\,dt = \frac{1}{2}\,c\,dt.$$

$n = \pm\frac{1}{2}$. — On a

$$v^2 = c^2\rho \qquad \text{et} \qquad v^2 = \frac{c^2}{\rho}.$$

Il existe des courbes pour lesquelles les droites issues de leurs points et divisant dans un rapport constant les rayons de courbure correspondants de la développée passent par un point fixe. Ce sont les courbes de Cesàro qui renferment comme cas particulier les lignes de Ribaucour et les spirales sinusoïdes. Elles comprennent aussi les coniques à centre, puisque (théorème de Mac-Laurin) les diamètres des coniques divisent dans le rapport $\frac{1}{3}$ les rayons de courbure correspondants de la développée.

On est donc amené à se poser le problème suivant : *Un mobile décrit une courbe de Cesàro sous l'action d'une force passant constamment par le pôle, trouver la loi de cette force.* Dans le cas des coniques à centre, la force est proportionnelle au rayon vecteur, résultat bien connu.

M. R. Goormaghtigh. — *Sur une égalité d'arcs.* — MM. R. Bouvaist et H. Lebesgue ont signalé (*N. A.*, 1916, p. 319, 357) des théorèmes généraux renfermant comme cas particulier une proposition concernant l'équivalence des arcs d'une ellipse et d'un limaçon de Pascal, que M. Barisien avait démontrée (1916, p. 225). Le théorème général suivant renferme aussi cette propriété :

Les arcs de la développée intermédiaire d'indice λ *d'une courbe* C *d'équation intrinsèque* $f(s, \rho) = 0$ *sont égaux aux arcs correspondants de la courbe* C′ *d'équation cartésienne* $f\left[\frac{1}{\lambda}(1+\lambda)x, (1+\lambda)y\right] = 0$.

Si l'on prend comme axes mobiles des x et des y la tangente et la normale en un point M de C, et si γ désigne le centre de courbure de C en M, on voit facilement, au moyen des formules de Cesàro, que l'élément d'arc du lieu du point qui divise $M\gamma$ dans le rapport de 1 à λ est

$$(1) \qquad \frac{1}{1+\lambda}\sqrt{(\lambda\, ds)^2 + (d\rho)^2}.$$

En faisant correspondre au point (s, ρ) de C le point de C′ qui a pour coordonnées $\lambda s : (1+\lambda)$ et $\rho : (1+\lambda)$, on voit que l'expression (1) est aussi l'élément d'arc de C′, ce qui démontre le théorème.

En particulier, si l'on considère comme courbe C une cycloïdale, on retrouve le résultat obtenu par M. Lebesgue (1916, p. 358), notamment que la rectification des cycloïdales allongées ou raccourcies (trochoïdales) se ramène aux intégrales elliptiques. Il résulte, en effet, de l'équation intrinsèque des cycloïdales que C′ est dans ce cas une ellipse; d'autre part, les développées intermédiaires des cycloïdales sont des trochoïdales de même module. D'une manière plus précise, on déduit facilement des considérations qui précèdent la proposition suivante, d'ailleurs connue [*voir* A. Gob, *Rectification des épitrochoïdes* (*Mém. de la Soc. des Sc. de Liége*, 1902)] :

Si l'on considère d'une part une trochoïdale de module n, *roulette d'un point lié à un cercle de rayon* r *situé à une distance* h *du centre de ce cercle, et d'autre part l'ellipse de demi-axes* $r+h$ *et* $r-h$, *un arc de la trochoïdale vaut* $2(1+n)$ *fois l'arc correspondant de l'ellipse.*

Pour $n=1$, on retrouve le cas du limaçon de Pascal.

M. **R. Goormaghtigh**. — *Sur l'orthopôle.* — La propriété du point de Feuerbach signalée par M. Thébault (*N. A.*, 1916, p. 499) peut être généralisée de la manière suivante. Sur un diamètre quelconque δ du cercle circonscrit à un triangle, il y a deux points I_1 et I_2, symétriques par rapport au centre du cercle circonscrit, tels que les droites qui joignent les sommets du triangle aux projections α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 de I_1 et I_2 sur les côtés correspondants soient concourantes en des points J_1 et J_2. Nous avons montré (*Journal de Vuibert*, 1913-1914, p. 110) que les coniques Σ_1 et Σ_2 qui touchent les côtés en α_1, β_1, γ_1 et en α_2, β_2, γ_2 passent par l'orthopôle de δ. Les points d'Hamilton correspondant à I_1 sont les intersections des côtés correspondants du triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et du triangle formé par les milieux des côtés du triangle fondamental. On a alors la proposition suivante :

Le triangle formé par les points d'Hamilton correspondant au point I_1 *est circonscrit au triangle* *fondamental et homologique à ce triangle; l'axe d'homologie est la tangente à la conique Σ_1 en l'orthopôle du diamètre δ.*

Cette tangente est la transversale réciproque de la droite qui joint I_1 au centre de gravité du triangle.

M. **E. Jacquet**. — *Sur le problème de Pappus généralisé.* — Voici une autre solution de la question, traitée dans ce journal par M. Joffroy (1916, p. 168) et par M. J. Lemaire (1917, p. 133) :

Le problème revient évidemment à construire un triangle OAB [1] dans lequel on connaît la base $AB = l$, l'angle opposé $AOB = \omega$ et la longueur de la bissectrice $OP = d$. Sur AB comme corde je décris l'arc AKB du segment capable de l'angle ω. La bissectrice OP passera par le milieu I du second arc AB. Or $IO - IP = OP = d$ et $IO . IP = \overline{IA}^2$. Nous sommes donc ramenés à construire deux longueurs, connaissant leur différence et leur produit. La circonférence décrite de I comme centre, avec la plus grande de ces longueurs comme rayon, coupe la première au point O cherché : le rayon de ce cercle est évidemment supérieur à IA.

La discussion est immédiate. La condition de possibilité est : $OP \leqq KC$, ou $d \leqq \frac{l}{2} \cot \frac{\omega}{2}$, ou enfin $l \geq 2d \tang \frac{\omega}{2}$.

Le point de rencontre P′ de la deuxième circonférence avec le prolongement de AB donne lieu à un deuxième triangle AO′B qui fournit les solutions de seconde espèce. Celles-ci existent toujours.

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

M. **N.-N. Parfentieff** (Kazan). — *Sur quelques formules asymptotiques.* — C'est un fait très connu que la notion arithmétique de l'intégrale peut conduire à un grand nombre de formules, exactes, ou quelquefois asymptotiques. La présente remarque a pour objet d'attirer l'attention du lecteur sur une série de ces formules asymptotiques.

La source de nos formules sera l'intégrale

$$\int_0^1 x^p \log x \, dk = -\frac{1}{(p+1)^2}. \tag{1}$$

D'autre part, arithmétiquement, on a

$$-\frac{1}{(p+1)^2} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \log\left(\frac{k}{n}\right),$$

et par suite, *asymptotiquement*, nous avons le droit d'écrire ([1])

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \log\left(\frac{k}{n}\right) \sim -\frac{1}{(p+1)^2},$$

c'est-à-dire

$$1^{1^p}.2^{2^p}.3^{3^p}\ldots n^{n^p} \sim e^{-\frac{1}{(p+1)^2}n^{p+1}}.n^{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}, \tag{2}$$

formule asymptotique dont nous pouvons déduire une foule *d'égalités arithmétiques asymptotiques.*

Par exemple, en posant dans la formule (2), $p = 0$, nous arrivons à la formule célèbre de *Stirling*

$$1.2.3\ldots n = n! \sim e^{-n} n^n.$$

Ensuite, en posant $p = 1$, nous avons

$$1.2^2.3^3\ldots n^n \sim e^{-\frac{1}{4}n^2}.n^{\frac{1}{2}n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}. \tag{3}$$

([1]) Nous employons le signe $\sim$ pour l'égalité asymptotique.

Dans notre Livre *Études sur la théorie de la croissance des fonctions* publié en langue russe, nous avons donné la formule asymptotique suivante qui est une généralisation de la formule de Stirling :

$$\Gamma(1).\Gamma(2)\ldots\Gamma(n+1) \sim (\sqrt{2\pi})^n.e^{-\frac{n^2}{2}}.n^{\frac{n^2}{2}}.$$

En la comparant avec la relation (3), nous voyons qu'*asymptotiquement*

$$\Gamma(1)\,\Gamma(2).\Gamma(3)\ldots\Gamma(n+1) \sim 1.2^2.3^3.4^4\ldots n^n.e^{-\frac{1}{4}n^2}$$

ou

$$1^n.2^{n-1}.3^{n-2}.4^{n-3}\ldots(n-1)^2.n \sim 1^1.2^2.3^3.4^4\ldots n^n.e^{-\frac{1}{4}n^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1^1.2^2.3^3.4^4\ldots n^n}{1^n.2^{n-1}.3^{n-2}\ldots(n-1)^2.n} \sim e^{\frac{1}{4}n^2}.$$

Toutes ces formules, malgré leur simplicité, peuvent avoir des applications dans l'arithmétique des grands nombres.