NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-N. BARISIEN

Sur les paraboles qui passent par les pieds des normales issues d'un point donné à une ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 401-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__401_0>

[$L^1 5b$]

SUR LES PARABOLES QUI PASSENT PAR LES PIEDS DES NORMALES ISSUES D'UN POINT DONNÉ A UNE ELLIPSE (¹);

Par E.-N. BARISIEN.

1. Soient l'ellipse d'équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

et (α, β) le point d'émission des normales. Les quatre pieds de ces normales sont à l'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole équilatère

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0 \qquad (c^2 = a^2 - b^2),$$

dite d'*Apollonius*.

L'équation d'une conique quelconque passant par ces quatre pieds peut donc s'écrire

$$\lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0. \tag{1}$$

2. Les équations du centre de cette conique sont

$$2\lambda b^2x + c^2y + b^2\beta = 0,$$
$$2\lambda a^2y + c^2x - a^2\alpha = 0.$$

Si (α, β) reste fixe, le lieu de ce centre est donné par l'équation

$$\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{c^2y + b^2\beta}{c^2x - a^2\alpha}$$

(¹) Cet article est sans doute le dernier travail de notre regretté collaborateur. Il nous l'avait envoyé peu de temps avant sa mort et il n'a pu en revoir les épreuves.

ou

$$(2) \qquad c^2(b^2x^2 - a^2y^2) = a^2b^2(\alpha x + \beta y).$$

C'est donc une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.

Les équations de ces asymptotes sont

$$bx \pm ay = \frac{ab(a\alpha \mp b\beta)}{2c^2}.$$

3. Nous allons étudier, parmi les coniques (1), les deux paraboles passant par les pieds des normales, que l'on pourrait nommer, par extension, *paraboles d'Apollonius*.

La conique (1) sera une parabole si

$$c^4 - 4\lambda^2 a^2 b^2 = 0.$$

D'où les deux valeurs de λ

$$\lambda = \pm \frac{c^2}{2ab}.$$

On a ainsi les équations des deux paraboles π et π_1 :

$$(3) \quad c^2(bx + ay)^2 + 2ab(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2c^2 = 0 \quad (\pi),$$

$$(4) \quad c^2(bx - ay)^2 - 2ab(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2c^2 = 0 \quad (\pi_1).$$

4. L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$(5) \qquad (bx + ay - k)^2 - 2\omega(ax - by - l) = 0.$$

La droite

$$(6) \qquad bx + ay - k = 0$$

est l'équation de l'axe de π, et

$$(7) \qquad ax - by - l = 0$$

l'équation de la tangente au sommet de π.

2ω est le paramètre de π, multiplié par $\sqrt{a^2+b^2}$.

En identifiant les équations (3) et (5), on a les relations

$$bk + a\omega = -\frac{ab^3\beta}{c^2},$$
$$ak - b\omega = \frac{a^3b\alpha}{c^2},$$
$$k^2 + \omega l = -a^2b^2.$$

Les deux premières donnent k et ω, la troisième donne ensuite l. On obtient ainsi :

$$k = \frac{ab(a^3\alpha - b^3\beta)}{a^4 - b^4}, \qquad \omega = -\frac{a^2b^2(a\alpha + b\beta)}{a^4 - b^4},$$
$$l = \frac{(a^3\alpha - b^3\beta)^2 + (a^4 - b^4)^2}{(a^4 - b^4)(a\alpha + b\beta)}.$$

Les équations (6) et (7) deviennent donc, pour l'axe de π,

$$(8) \qquad bx + ay = \frac{ab(a^3\alpha - b^3\beta)}{a^4 - b^4},$$

et pour la tangente au sommet de π,

$$(9) \qquad ax - by = \frac{(a^3\alpha - b^3\beta)^2 + (a^4 - b^4)^2}{(a^4 - b^4)(a\alpha + b\beta)}.$$

La résolution des équations (8) et (9) donnent les coordonnées du sommet de π.

A remarquer que les axes de π et π_1 ont des directions fixes, quel que soit le point (α, β); ces directions sont les diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.

On trouve de même, pour les équations de l'axe et de la tangente au sommet de la parabole π_1,

$$(10) \qquad bx - ay = \frac{ab(a^3\alpha + b^3\beta)}{a^4 - b^4},$$

$$(11) \qquad ax + by = \frac{(a^3\alpha + b^3\beta)^2 + (a^4 - b^4)^2}{(a^4 - b^4)(a\alpha - b\beta)}.$$

5. En résolvant (8) et (10) on a, pour les coordonnées du point de rencontre des axes de π et π_1,

$$(12) \qquad x = \frac{a^3 b \alpha}{a^4 - b^4}, \qquad y = -\frac{ab^3 \beta}{a^4 - b^4};$$

d'où il résulte

$$\frac{y}{x} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{b^2}{a^2}.$$

6. En appelant (ξ, η) le foyer de la parabole π, et

$$(13) \qquad ax - by - h = 0$$

l'équation de la directrice, l'équation (3) peut s'écrire

$$(14) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{(ax - by - h)^2}{a^2 + b^2},$$

ou

$$(bx + ay)^2 - 2x[\xi(a^2+b^2) - ah]$$
$$- 2y[\eta(a^2+b^2) + bh] + (\xi^2+\eta^2)(a^2+b^2) = h^2 = 0.$$

En identifiant cette équation avec (3), on a

$$(15) \qquad \xi(a^2+b^2) - ah = -\frac{ab^3\beta}{c^2},$$

$$(16) \qquad \eta(a^2+b^2) + bh = \frac{a^3 b\alpha}{c^2},$$

$$(17) \qquad (\xi^2+\eta^2)(a^2+b^2) - h^2 = -a^2 b^2.$$

(15) et (16) s'écrivent

$$\xi(a^2+b^2) = \quad ah - \frac{ab^3\beta}{c^2},$$

$$\eta(a^2+b^2) = -bh + \frac{a^3 b\alpha}{c^2}.$$

Élevons au carré et ajoutons ces deux équations, il vient

$$(\xi^2+\eta^2)(a^2+b^2)^2$$
$$= (a^2+b^2)h^2 + \frac{a^2b^2(a^4\alpha^2+b^4\beta^2)}{c^4} - \frac{2a^2b^2h(a\alpha+b\beta)}{c^2}$$

ou

$$(a^2+b^2)\left[(\xi^2+\eta^2)(a^2+b^2)-h^2\right] = \frac{a^2b^2(a^4\alpha^2+b^4\beta^2)}{c^4} - \frac{2a^2b^2h(a\alpha+b\beta)}{c^2}.$$

En tenant compte de (17), cette équation devient

$$-(a^2+b^2) = \frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2}{c^4} - \frac{2h(a\alpha+b\beta)}{c^2},$$

d'où

$$(18) \qquad h = \frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)^4}{2c^2(a\alpha+b\beta)}.$$

En portant cette valeur de h dans (15) et (16), on obtient les coordonnées ξ, η du foyer de π :

$$(19) \qquad \xi = \frac{a}{a^4-b^4}\left[\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2(a\alpha+b\beta)} - b^3\beta\right],$$

$$(20) \qquad \eta = \frac{b}{a^4-b^4}\left[-\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2(a\alpha+b\beta)} + a^3\alpha\right].$$

L'équation (13) de la directrice est

$$(21) \qquad ax-by = \frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2c^2(a\alpha+b\beta)}.$$

En résolvant (8) et (9), on aurait les coordonnées du pied de la directrice.

On trouve de même, pour les coordonnées du foyer (ξ_1, η_1) de la parabole π_1,

$$(22) \qquad \xi_1 = \frac{a}{a^4-b^4}\left[\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2(a\alpha+b\beta)} + b^3\beta\right],$$

$$(23) \qquad \eta_1 = \frac{b}{a^4-b^4}\left[\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2(a\alpha-b\beta)} - a^3\alpha\right].$$

La directrice de π_1 a pour équation

$$(24) \qquad ax+by = \frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2-(a^2+b^2)c^4}{2c^2(a\alpha-b\beta)}.$$

7. La corde focale principale a pour équation, dans π,

$$a(x-\xi)-b(y-\eta)=0$$

ou

$$(25)\quad ax-by=\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^4+b^2)c^4}{2c^2(a\alpha+b\beta)}-\frac{a^2b^2(a\alpha-b\beta)}{a^4-b^4}.$$

L'équation de la corde focale de π_1 est aussi

$$(26)\quad ax+by=\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2c^2(a\alpha-b\beta)}-\frac{a^2b^2(a\alpha-b\beta)}{a^4-b^4}.$$

8. *Cas où le point* (α, β) *est sur l'ellipse.* — Alors

$$\alpha=a\cos\varphi.\qquad \beta=b\sin\varphi.$$

Les équations des paraboles π et π_1 sont

$$c^2(bx+ay)^2+2ab(b^3x\sin\varphi-a^3y\cos\varphi)-a^2b^2c^2=0,$$
$$c^2(bx-ay)^2-2ab(b^3x\sin\varphi-a^3y\cos\varphi)-a^2b^2c^2=0.$$

La parabole π enveloppe la quartique

$$(27)\qquad c^4[(bx+ay)^2-a^2b^2]^2=4a^2b^2(b^6x^2+a^6y^2).$$

La parabole π_1 enveloppe la quartique

$$(28)\qquad c^4[(bx-ay)^2-a^2b^2]^2=4a^2b^2(b^6x^2+a^6y^2).$$

L'axe de π a pour équation

$$bx+ay=\frac{ab(a^4\cos\varphi-b^4\sin\varphi)}{a^4-b^4}.$$

Celui de π_1 s'écrit

$$bx-ay=\frac{ab(a^4\cos\varphi+b^4\sin\varphi)}{a^4-b^4}.$$

Le point de rencontre de ces deux axes a pour coordonnées

$$(29)\qquad x=\frac{a^4b\cos\varphi}{a^4-b^4},\qquad y=-\frac{ab^4\sin\varphi}{a^4-b^4}.$$

Le lieu de ce point est l'ellipse

$$(30) \qquad \frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}=\frac{a^2b^2}{(a^4-b^4)^2}=0.$$

9. *Si* (α, β) *décrit l'ellipse, la droite qui joint ce point au point de rencontre des axes de* π *et* π_1 *est normale à une ellipse fixe.*

L'équation de cette droite qui joint le point (α, β) au point (29) est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 1 \\ a^4 b\cos\varphi & -ab^4\sin\varphi & a^4-b^4 \end{vmatrix}=0,$$

ou

$$b[a(a^3+b^3)-b^4]x\sin\varphi \\ +a[b(a^3+b^3)-a^4]y\cos\varphi = a^2b^2(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi.$$

On peut identifier cette équation avec la suivante :

$$\mathrm{A}x\sin\varphi-\mathrm{B}y\cos\varphi=(\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$

qui est la normale à l'ellipse

$$\mathrm{B}^2x^2+\mathrm{A}^2y^2-\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2=0.$$

L'identification donne

$$\frac{\mathrm{A}}{b(a^4+ab^3-b^4)}=\frac{\mathrm{B}}{a(a^4-a^3b-b^4)}=\frac{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}{a^2b^2(a^2+b^2)} \\ =\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}}{\sqrt{b^2(a^4+ab^3-b^4)^2-a^2(a^4-a^3b-b^4)^2}},$$

d'où

$$\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=\frac{a^4b^4(a^2+b^2)^2}{b^2(a^4+ab^3-b^4)^2-a^2(a^4-a^3b-b^4)^2},$$

$$\mathrm{A}=\frac{a^2b^3(a^2+b^2)(a^4+ab^3-b^4)}{b^2(a^4+ab^3-b^4)^2-a^2(a^4-a^3b-b^4)^2},$$

$$\mathrm{B}=\frac{a^3b^2(a^2+b^2)(a^4-a^3b-b^4)}{b^2(a^4+ab^3-b^4)^2-a^2(a^4-a^3b-b^4)^2}.$$

La droite précitée est donc normale à l'équation

$$\frac{x^2}{b^2(a^4+ab^3-b^4)^2}+\frac{y^2}{a^2(a^4-ab^3-b^4)^2}$$
$$=\frac{a^4b^4(a^2+b^2)^2}{[b^2(a^4+ab^3-b^4)^2-a^2(a^4-a^3b-b^4)^2]^2}.$$

On peut dire aussi que cette droite a pour enveloppe la développée de cette ellipse, soit

$$(\mathrm{A}x)^{\frac{2}{3}}+(\mathrm{B}y)^{\frac{2}{3}}=(\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2)^{\frac{2}{3}}$$

ou

$$[bx(a^4+ab^3-b^4)]^{\frac{2}{3}}$$
$$+[ay(a^4-a^3b-b^4)]^{\frac{2}{3}}=[a^2b^2(a^2+b^2)]^{\frac{2}{3}}.$$