

P. APPELL

**Sur la méthode de Poincaré pour étudier  
la stabilité de l'équilibre**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 19  
(1919), p. 161-168

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1919\\_4\\_19\\_\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__161_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[R4]

**SUR LA METHODE DE POINCARÉ  
POUR ÉTUDIER LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ;**

PAR M. P. APPELL.

I. Poincaré a donné, pour étudier la nature des positions d'équilibre d'un système, une méthode remarquable basée sur la considération des figures de bifurcation, des figures limites et des échanges de stabilité. Cette méthode est exposée dans le *Mémoire Sur l'équilibre d'une masse fluide* (*Acta mathematica*, t. VII), et dans l'Ouvrage de Poincaré : *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (Paris, Gauthier-Villars) ; elle est indiquée dans une Notice que je publie cette année dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* (1919) ; elle sera exposée dans le Tome IV de mon *Traité de Mécanique rationnelle*.

Je me borne ici, en vue de l'enseignement de spéciales et de licence, à exposer la méthode dans le cas le plus simple et à en donner des exemples élémentaires.

II. Imaginons un système matériel, à liaisons sans frottement, dont la position dépend d'une seule coordonnée  $q$  ; admettons que les forces données, qui agissent sur le système, dérivent d'une fonction des forces  $U(q, \lambda)$  contenant, outre  $q$ , un autre paramètre  $\lambda$  indépendant de  $q$ .

On sait que les valeurs de  $q$  correspondant aux positions d'équilibre, pour une valeur donnée de  $\lambda$ , s'obtiennent en cherchant les valeurs de  $q$  qui rendent

$U(q, \lambda)$  *maximum* ou *minimum*; à une valeur de  $q$  rendant  $U$  *maximum*, correspond une position d'équilibre stable.

Ceci étant rappelé, la condition d'équilibre est donnée par l'équation

$$\varphi(q, \lambda) = \frac{\partial U}{\partial q} = 0.$$

Considérons deux axes  $Oq$  et  $O\lambda$  (*fig. 1*) et construisons par rapport à ces axes la courbe  $\varphi(q, \lambda) = 0$ . Pour une valeur donnée de  $\lambda$ ,  $q$  a plusieurs valeurs donnant des points A, B, C, ... de la courbe. A chacune de ces valeurs répond une position d'équilibre qu'on peut caractériser par le point correspondant de la courbe  $\varphi = 0$ . Quand  $\lambda$  varie d'une manière continue en croissant, chacun de ces points décrit une branche de courbe; on a ainsi des séries linéaires de figures d'équilibre.

Supposons que pour  $\lambda = \lambda_0 = OP_0$ , deux valeurs de  $q$  deviennent égales et que ces valeurs se séparent de nouveau pour  $\lambda > \lambda_0$  de telle façon que la courbe présente un point double E : à ce point correspondra une position d'équilibre de bifurcation où deux séries linéaires A et B se croisent. Supposons au contraire que deux valeurs de  $q$  correspondant aux points C et D deviennent égales pour  $\lambda = \lambda_1 = OP_1$ , puis imaginaires pour  $\lambda > \lambda_1$  : alors la position correspondante L est une position d'équilibre limite. Il peut arriver qu'une position H soit à la fois limite et de bifurcation si, pour une certaine valeur  $\lambda = \lambda_2 = OP_2$  trois valeurs de  $\lambda$  correspondant aux points P, Q, R devenaient égales, de façon que P, Q, R se confondent en un point H où passe une branche simple Q qui continue et une branche PR à tangente verticale : alors pour  $\lambda > \lambda_2$ ,  $q$  n'aurait plus qu'une valeur réelle. Le point H

est à la fois une position limite et une position de bifurcation.

Il pourrait arriver inversement que pour  $\lambda = \lambda_3 = OP_3$ , (*fig.* 1, IV), trois valeurs de  $q$  soient égales, dont une

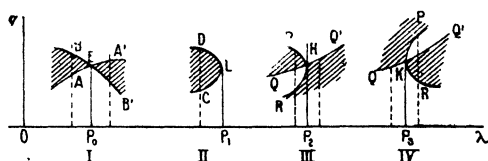


Fig. 1.

seule existerait pour  $\lambda < \lambda_3$ , les trois étant réelles pour  $\lambda > \lambda_3$ . Le point correspondant K serait à la fois limite et de bifurcation, mais il serait limite pour des valeurs de  $\lambda$  décroissantes jusqu'à  $\lambda_3$ .

La courbe  $\varphi = 0$  divise le plan en deux régions; dans la première, la fonction  $\varphi(q, \lambda)$  est positive: elle est couverte de hachures; dans la seconde  $\varphi(q, \lambda)$  est négative. En un point de la courbe tel que A  $\varphi$  est nul, au-dessus  $\varphi > 0$ , au-dessous  $\varphi < 0$ ; si donc,  $\lambda$  étant constant,  $q$  croît, la dérivée  $\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$  est positive en A; donc  $U(q)$  y est minimum et A est une position d'équilibre *instable*. Au contraire, pour des raisons analogues,  $\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$  est négative en B; donc la position correspondante est *stable*. Ainsi une position est stable ou instable suivant que la région au-dessus du point figuratif est blanche ou hachurée.

On voit alors immédiatement sur la figure 1 les faits suivants :

1° Si deux suites linéaires de positions d'équilibre se croisent en un point E, *figure de bifurcation*, les stabilités s'échangent: la suite B, qui était stable,

devient instable en B'; la suite A, qui était instable, devient stable en A'.

2° Si deux suites linéaires D et C se réunissent en un point limite L, l'une donne des figures stables, l'autre des figures instables; on peut dire aussi, en suivant l'arc DLC, que les figures correspondantes forment une seule suite linéaire dont les stabilités s'échangent quand on passe par L.

3° Si une figure H ou K est à la fois limite et de bifurcation, en suivant la branche simple oblique QQ' on obtient des figures dont la stabilité s'échange; mais en suivant la branche PR, à tangente verticale en H ou K, on obtient des figures de même nature toutes stables ou toutes instables; il en est de même quand on change de branche, par exemple le long du contour PHQ' les figures sont stables, avant et après H; il en est de même de RKQ.

PREMIER EXEMPLE. — *Régulateur de Watt.* — Cherchons les positions d'équilibre relatif d'un point pesant M qui glisse sans frottement sur une circonférence tournant avec une vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un diamètre vertical fixe. En prenant comme origine le centre O, comme axe des  $y$  la verticale descendante, et comme axe des  $x$  l'horizontale, on a

$$U = gy + \frac{\omega^2}{2} x^2,$$

où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées du mobile. Soient  $a$  le rayon de la circonférence,  $q$  l'angle du rayon OM avec Oy, on a

$$y = a \cos q, \quad x = a \sin q;$$

d'où

$$U = ag \left[ \cos q + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 q \right],$$

$\lambda$  ayant la valeur positive :  $\lambda = \frac{\alpha}{g} \omega^2$ . On obtient tous les points de la circonférence en faisant varier  $q$  de  $-\pi$  à  $+\pi$ . On a donc

$$-\pi < q \leq +\pi, \quad 0 \leq \lambda.$$

Ceci posé, on a

$$\varphi(q, \lambda) = \frac{dU}{dq} = ag \sin q [\lambda \cos q - 1].$$

La courbe  $\varphi(q, \lambda) = 0$  (fig. 2) se compose de plusieurs branches :

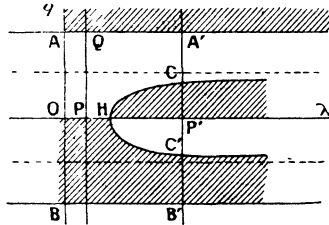
$$(O\lambda) \quad q = 0, \quad (AA') \quad q = \pi, \quad (BB') \quad q = -\pi$$

et

$$(CHC') \quad \lambda \cos q - 1 = 0:$$

cette dernière branche, construite en faisant varier  $q$  de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$  pour que  $\lambda$  soit positif, a la forme indiquée (fig. 2) : elle est symétrique par rapport à  $O\lambda$  et

Fig. 2.



a pour asymptotes  $q = \pm \frac{\pi}{2}$ . Dans la figure, nous avons couvert de hachures la région pour laquelle  $\varphi(q, \lambda) > 0$ . Si  $\lambda$  est plus petit que 1 (point P sur  $O\lambda$ ), il existe deux positions d'équilibre correspondant aux points P ( $q = 0$ ) et Q ( $q = \pi$ ); la première, d'après la disposition des hachures, est stable; la deuxième, instable.

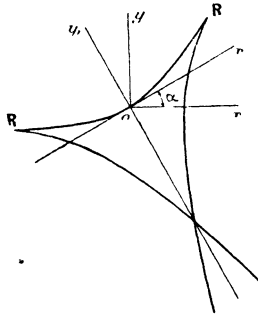
Si  $\lambda$  prend la valeur 1, P vient en H équilibre limite et de bifurcation, stable. Si  $\lambda > 1$ , on a le point P' ( $OP' = \lambda$ ), dont l'ordonnée coupe la courbe en quatre points C', P', C, A'; à chacun de ces points correspond une position d'équilibre (C' stable, P' instable, C stable, A' instable). On voit que, quand  $\lambda$  atteint et dépasse 1, la série linéaire des positions P, qui était stable, devient instable en P', et deux nouvelles séries linéaires de figures symétriques C et C' apparaissent, stables toutes deux; on a ainsi un exemple très simple d'un équilibre H à la fois limite et de bifurcation, avec échange de stabilités.

DEUXIÈME EXEMPLE. — Imaginons, dans un plan vertical, la courbe définie par les équations

$$\begin{aligned} y_1 &= 3q^2(2 - q^2), & \frac{dy_1}{dx_1} &= q, \\ x_1 &= 4q(3 - q^2), \end{aligned}$$

par rapport à deux axes rectangulaires  $x_1, Oy_1$ . Cette courbe a la forme indiquée dans la figure 3 avec deux

Fig. 3.



points de rebroussements, R et R', correspondant à  $q = \pm 1$ . Elle est symétrique par rapport à  $Oy_1$ .

Appelons  $\alpha$  l'angle de  $Ox_1$  avec l'horizontale  $Ox$ , et prenons un axe vertical ascendant  $Oy$ . Un point matériel pesant  $M$  glisse sans frottement sur cette courbe; trouver les positions d'équilibre du point.

Appelons  $y$  l'ordonnée de  $M$  par rapport aux axes  $xOy$  : on a, pour la fonction des forces

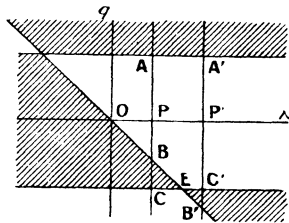
$$U = -mgy = -mg[x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha] \\ = -mg \cos \alpha [4q(3 - q^2)\lambda + 3q^2(2 - q^2)],$$

en posant  $\lambda = \tan \alpha$ . Nous supposons que  $\alpha$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ . Alors la fonction  $\varphi(q, \lambda) = \frac{\partial U}{\partial q}$  est, à un facteur positif près, égal à

$$\varphi(q, \lambda) = -(1 - q^2)(\lambda + q).$$

La courbe  $\varphi(q, \lambda) = 0$  se compose (fig. 4) des trois

Fig. 4.



droites  $q = 1$ ,  $q = -1$ ,  $q = -\lambda$ . La partie du plan  $\varphi(q, \lambda) > 0$  est couverte de hachures.

Si  $-1 \leq \lambda \leq +1$ , en prenant  $\overline{OP} = \lambda$ , on voit qu'il y a trois positions d'équilibre représentées par les points  $A, B, C$  :  $A$  et  $C$  instables (points de rebroussement);  $B$  stable. Il faut se représenter le point  $M$  placé en un rebroussement comme un point posé sur une pointe.

Si  $\lambda > 1$ , en prenant  $\overline{OP'} = \lambda$ , on trouve de même trois positions représentées par  $A', B', C'$ ; les positions



correspondant à A' et B' sont stables, C' instable; il y a un échange de stabilité entre les séries linéaires B, B' et C, C'. Au point de rebroussement (position stable) il faut se figurer le point M comme placé au fond d'un tube pointu.

Si  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ , le facteur  $\cos \alpha$  dans U est *négalif*; la figure est la même, mais les parties hachurées sont blanches et inversement.

TROISIÈME EXEMPLE. — *Exercice* : Équilibre d'un point glissant sans frottement sur une parabole  $y^2 = 2px$  et repoussé par un point de l'axe ( $x = \lambda, y = 0$ ) proportionnellement à la distance.

En prenant comme coordonnée  $q$  l'ordonnée  $y$  du point, on a une figure analogue à (2).

IV. GÉNÉRALISATIONS. — On trouvera dans Poincaré l'étude des cas où la position du système dépend de plusieurs coordonnées  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

On peut aussi imaginer un système à une coordonnée  $q$ , dont la fonction des forces contient *plusieurs* paramètres. Par exemple, si cette fonction contient deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $U(q, \lambda, \mu)$ , en posant

$$\varphi(q, \lambda, \mu) = \frac{\partial U}{\partial q},$$

on pourra, par rapport à trois axes rectangulaires  $O\lambda, O\mu, Oq$ , considérer les surfaces  $\varphi(q, \lambda, \mu) = 0$  et les régions  $\varphi(q, \lambda, \mu) \geq 0$ .

Un exemple simple est fourni par l'équilibre d'un point sur une parabole, ce point étant repoussé par un point fixe donné dans le plan de la courbe, proportionnellement à la distance.