NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES BOULIGAND

Introduction à l'étude de la mécanique et de ses principes

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 135-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__135_1>

[R6]

INTRODUCTION A L'ETUDE DE LA MECANIQUE ET DE SES PRINCIPES;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

(*Suite.*)

15. Ces données sont extrêmement complexes : un système qui se meut à proximité de la surface de notre planète n'est jamais dans un état d'indépendance complète vis-à-vis des systèmes voisins. S'il s'agit d'une bille placée sur un plan incliné, son mouvement sera influencé par la rugosité du plan et même par la résistance de l'air. L'influence de cette dernière se manifestera, plus considérable encore, si l'on étudie le mouvement d'un projectile, etc.

C'est dire qu'il a fallu déployer beaucoup de sagacité pour interpréter avec justesse les résultats des observations courantes faites sur les mouvements de toute espèce. Ce n'est qu'après une longue élaboration qu'on est parvenu à en induire les principes, capables de régir tous les mouvements connus, sur la Terre comme dans le Ciel.

A côté des difficultés accumulées par le grand nombre des corps et des actions en présence, il y en avait une autre qui, par bonheur, a sans doute échappé aux fondateurs de la Mécanique : elle provient du mouvement compliqué de la Terre par rapport au trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$ de la Mécanique céleste. Ce mouvement, en première approximation, s'obtient en composant :

1° Celui d'entraînement de notre planète autour du Soleil ;

2° Sa rotation autour de la ligne des pôles (en réalité, comme nous le verrons, cette dernière n'a pas une direction rigoureusement fixe par rapport aux étoiles fixes).

Mais alors, en admettant *a priori* qu'il existe des principes communs à tous les mouvements terrestres ou celestes, n'est-il pas à craindre qu'ils ne soient tout à fait masqués dans la Mécanique terrestre, du fait de la présence, dans les equations, des forces correctives provenant de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complementaire des mouvements précédents?

La difficulté se serait effectivement produite si la rotation de la Terre autour de la ligne des pôles avait été beaucoup plus rapide qu'elle ne l'est réellement.

Pour la grande majorité des phénomènes terrestres, la durée est courte : pendant ce temps, le mouvement d'entraînement de notre planète autour du Soleil peut passer, à un haut degré d'approximation, pour rectiligne et uniforme. Ce mouvement est un mouvement de translation. Sans troubler les accélérations, on pourra donc passer du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ de la Mécanique céleste à un trièdre parallèle $O'x'y'z'$ ayant son sommet au centre de la Terre. En outre, la vitesse angulaire de rotation de la Terre est très petite, soit la moitié de celle de la petite aiguille d'une horloge. Pendant la durée du jet d'un projectile, par exemple, le trièdre ayant son origine près du point de chute et ses axes liés à l'écorce terrestre n'a pas le temps de modifier sensiblement sa direction, et son origine décrit, d'un mouvement uniforme, un arc de parallèle qu'on peut confondre sensiblement avec une droite. En première approximation, ce trièdre subit encore, pendant la durée utile, une translation rectiligne et uniforme, ce qui dispense de modifier l'accélération.

C'est grâce à ces circonstances favorables que Galilée a pu, en étudiant la chute des corps, ou des phénomènes connexes (plan incliné, pendule), parvenir avant Newton, d'une manière plus ou moins explicite, aux principes que nous avons précédemment énoncés.

Par contre, dans les phénomènes d'une durée appréciable, l'influence du mouvement de la Terre doit intervenir : elle doit se manifester en particulier dans l'étude prolongée des oscillations d'un pendule, si toutefois il existe vraiment des principes régissant à la fois les mouvements terrestres comme ceux des astres. Foucault a constaté qu'il en est bien ainsi.

16. Mais avant d'aborder les problèmes où il faut tenir compte de la mobilité de notre planète, attachons-nous à étudier les indications données par la chute des corps. D'après l'expérience du tube de Newton, dans le vide, tous les corps tombent également vite : ce dispositif permet d'éliminer la résistance de l'air et les différences profondes qu'elle établissait entre le mouvement de chute d'une balle de plomb et d'une parcelle de duvet.

Déterminons, à l'aide d'un procédé cinématographique, l'accélération d'un de ces mouvements de chute. Nous trouvons une valeur g, qui non seulement est indépendante de la nature du corps, mais encore est sensiblement constante aux divers points de la surface du globe. Ici encore, nous avons donc obtenu, en faisant intervenir l'accélération, un caractère cinématique commun à tous les mouvements de chute libre. Ce que nous pourrons considérer comme la *cause* du mouvement sera donc intimement lié à l'accélération.

Un des plus beaux titres de gloire de Newton est assurément d'avoir pensé que cette accélération g, précédemment mesurée, se confond avec celle des actions de gravitation, autrement dit que la pesanteur est un cas particulier de l'attraction universelle. Considérons un corps, voisin de l'écorce terrestre : ne va-t-il pas être soumis, comme les astres, à une action de la Terre, et aussi à des actions des autres corps célestes ? Toutefois, dans les conditions où nous nous plaçons, ces dernières seront négligeables. On pourra, en première approximation, tenir compte uniquement de l'action prépondérante de la Terre. Pour vérifier cette hypothèse, il suffit de comparer g à l'accélération lunaire γ : la supposition de Newton sera légitime si l'on vérifie que l'on a

$$\frac{g}{R^2} = \frac{\gamma}{\rho^2},$$

en désignant par R le rayon terrestre, par ρ le rayon moyen de l'orbite lunaire. La vérification est satisfaisante et s'opère au degré d'approximation qu'on peut attendre de ce calcul grossier.

17. Dans le raisonnement qui précède, nous avons implicitement admis que la Terre agit sur les corps placés à sa surface comme le ferait un point unique, placé en son centre. Quelques explications sont ici nécessaires. Lorsque nous avons fait une étude d'ensemble sur le système solaire, nous avons considéré les astres comme des points matériels : étudiant maintenant les mouvements terrestres, nous n'avons plus le droit de faire cette approximation. Tout au plus pourrons-nous réduire les corps terrestres à des points, vis-à-vis de notre planète elle même, et tant que nous n'essaierons pas de comparer les mouvements de ces corps entre eux.

Ici encore, une circonstance favorable se présente pour éluder la difficulté précédente. Imaginons qu'on ait décomposé la totalité du volume terrestre en un très grand nombre de volumes très petits, et concevons que chacun de ces volumes agisse *isolément* sur un corps voisin du sol de manière à lui communiquer une accélération de la forme $\frac{\mu}{r^2}$, μ étant un coefficient spécifique du volume considéré. Cet isolement est d'ailleurs une supposition purement théorique, et qu'aucun fait expérimental ne peut étayer. Déterminons nos volumes partiels, à l'aide de sphères concentriques à la Terre, supposée elle-même sphérique, et supposons que les courbes déterminées par ces sphères soient homogènes, c'est-à-dire que deux volumes élémentaires égaux d'une même courbe impriment isolément, à un corps équidistant, voisin du sol, des accélérations égales. Ces volumes étant de plus en plus petits et de plus en plus nombreux, composons alors les accélérations qu'ils impriment à ce corps (réduit à un point) : il est classique que l'accélération résultante passe par le centre de la Terre et pour expression [1]

$$\frac{M}{R^2},$$

où M désigne la somme des coefficients μ relatifs aux divers éléments de volume. Ce fait justifie notre raisonnement du n° **12**. Il est intéressant de noter ici que, si on laisse arbitraire la loi de variation de densité des couches sphériques, la loi d'attraction en raison inverse du carré de la distance et celle d'attraction propor-

---

[1] Soit dv l'un des éléments de volume en question. On pose $\mu = \lambda dv$, λ étant seulement fonction de la distance au centre, soit a. Pour une couche d'épaisseur da, l'accélération d'un point P situé à une distance R du centre est l'intégrale

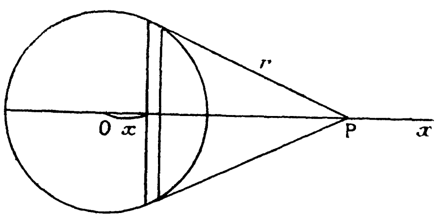
$$\lambda da \int_{-C}^{+R} \frac{2\pi a\, dx}{r^2}\,\frac{R-x}{r}$$

(décomposez la surface en zones de hauteur dx).

On a d'ailleurs

$$r^2 = R^2 - 2Rx + a^2 \qquad \text{et} \qquad r\,dr = -R\,dx;$$

Fig. 1.



on peut prendre r comme nouvelle variable. Si P est extérieur à la courbe, les limites de l'intégrale deviennent $R-a$ et $R+a$. On obtient

$$\pi a \frac{\lambda da}{R^2}\int_{R-a}^{R+a}\left(1+\frac{R^2-a^2}{r^2}\right)dr = \lambda\frac{4\pi a^2 da}{R^2}.$$

Or $4\pi a^2 da$ est justement le volume de la couche, le coefficient de proportionnalité λ est donc le même pour la couche comme pour un de ses éléments. Le théorème annoncé en résulte aisément.

tionnelle à la distance sont les seules pour lesquelles l'action d'une sphère sur un point extérieur équivaut à une action de son centre, suivant une de ces lois ([1]).

18. Voici donc la pesanteur mise au rang des forces de gravitation, et de ce fait, nous pourrons désormais lui appliquer les principes qui nous ont fourni la synthèse des mouvements du système solaire. Par des mesures précises, opérées à l'aide du pendule, on vérifie bien que g diminue quand on s'éloigne du centre du globe. On constate également des variations avec la latitude, explicables par le mouvement de la

---

([1]) L'équation fonctionnelle qui détermine une fonction $\varphi(r)$ telle que chaque couche sphérique homogène puisse être remplacée par son centre n'est autre que

$$\int_{R-a}^{R+a} \frac{r^2+R^2-a^2}{2R^2}\varphi(r)\,dr = 2a\varphi(R).$$

Nous cherchons à déterminer la fonction $\varphi(r)$ de manière que cette équation soit satisfaite quel que soit R, et quel que soit a. Pour résoudre cette équation, on peut poser

$$R-a=u, \qquad R+a=v, \qquad r^2\varphi(r)=\psi(r);$$

elle devient

$$\int_u^v \left(1-\frac{uv}{r^2}\right)\psi(r)\,dr = 2(v-u)\psi\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

En dérivant par rapport à u et v, on peut éliminer entre les deux équations obtenues le terme contenant une intégrale, et il reste, en revenant aux anciennes notations,

$$\frac{\psi(R-a)-\psi(R+a)-2\psi(R)}{a^2} = 2\frac{\psi'(R)}{R}.$$

Faisons tendre a vers zéro. Il nous reste

$$\psi''(R) = 2\frac{\psi'(R)}{R},$$

d'où l'on déduit aisément le résultat annoncé.

Terre et par sa forme ellipsoïdale. Mais, même dans un champ d'expériences relativement étendu, ces variations sont imperceptibles.

Pour cette raison, dès qu'on cesse d'assimiler à un point un corps voisin de la Terre, on peut, s'il est de dimensions ordinaires, considérer comme constante en grandeur, direction et sens, *l'accélération prise par un volume partiel de ce corps, jugé réductible à un point*, en supposant qu'à partir de sa position actuelle, ce volume partiel soit subitement isolé du reste du corps, et de l'ensemble des corps avoisinants (atmosphère, support, etc.), pour n'être plus soumis qu'à l'influence de la Terre.

Ici, nous rencontrons une nouvelle difficulté : nos observations ne porteront jamais sur le mouvement d'un point proprement dit, mais sur celui d'une parcelle de matière. Considérons cette parcelle à l'ins-

Fig. 2.

tant t_0 et à l'instant t : c'est seulement par une idéalisation que nous pouvons passer du mouvement de la parcelle au mouvement d'un point, il n'y a pas à vrai dire de vecteur déplacement bien défini pour la parcelle, ce vecteur est simplement astreint à demeurer dans un champ limitatif, correspondant à l'ensemble des valeurs joignant un point intérieur à P_0 (position à l'instant t_0) à un point intérieur à P (position à l'instant t). Le mathématicien admet que, lorsque l'on diminue indéfiniment toutes les dimensions de cette parcelle, tous ces vecteurs possèdent une même limite, et pour appliquer au problème les méthodes de l'analyse, il supposera de plus que le vecteur limite ainsi obtenu est deux fois dérivable par rapport au temps. Cette méthode sera justifiée *a posteriori* si elle cadre avec les résultats de l'observation : cette dernière ne donne jamais, à proprement parler, ce qu'on est en droit d'appeler un vecteur déplacement, elle définit ce vecteur avec une certaine approximation, mais avec *un voisinage d'ordre zéro* (¹). On postule ici qu'on est en droit de raisonner comme si le voisinage était d'ordre 2 au moins.

19. Un véritable postulat est donc mis en jeu lors de l'idealisation précédente, lorsqu'on définit par passage à la limite le vecteur déplacement, et qu'on admet l'existence, pour ce vecteur, de dérivées géométriques premières et secondes. Ce postulat est un élément indispensable, pour construire la dynamique des milieux continus. Il élimine la possibilité d'une grande agitation mutuelle de parcelles très petites à l'intérieur d'un volume matériel de faibles dimensions. L'expérience ne nous permettant pas toujours de décider si, oui ou non, cette agitation existe (²), nous étudions au point de vue spéculatif le cas le plus simple, celui où elle n'existerait pas, en pensant que, même si elle

(¹) On dit que deux vecteurs sont voisins lorsque leurs composantes sont des fonctions voisines. L'ordre du voisinage de deux vecteurs est l'ordre du voisinage des fonctions qui expriment chaque composante Deux fonctions peuvent être voisines d'ordre zero, c'est-à-dire avoir des courbes representatives tres rapprochées, mais dont les tangentes fassent entre elles des angles appreciables Si ces angles deviennent aussi tres petits, on dit qu'il y a voisinage d'ordre 1. Dans ce cas, il y a proximité non seulement entre les fonctions, mais aussi entre leurs derivees premieres. Si cette condition est egalement realisee pour les dérivées secondes, on dit qu'il y a voisinage d'ordre 2, et ainsi de suite

(²) Il y a cependant des cas ou cette agitation est reconnue; exemple *le mouvement brownien.*

existait réellement pour des subdivisions très avancées de la matière, les résultats obtenus conformément au postulat précédent s'appliqueraient à des phénomènes macroscopiques, c'est-à-dire observés moins en détail, la subdivision étant poussée moins loin.

20. Revenons à l'étude de la chute des corps. Si le corps nous paraît de dimensions si petites que sa forme géométrique nous échappe, nous l'assimilons à un point, et nous obtenons une synthèse satisfaisante de tous les mouvements possibles observés en lui imprimant certaines vitesses initiales au moyen de l'équation

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}.$$

Ici, nous disposons de la vitesse initiale du mobile; c'est une circonstance nouvelle et un élément de vérification qui nous manquait en Mécanique céleste. Nous pouvons opérer également soit dans le vide, soit dans l'air. Dans ce cas, nous pourrons faire la synthèse du mouvement en admettant que $\vec{F}$ est la résultante de l'action de la pesanteur et d'une certaine résistance, due à l'air environnant qui subit un entraînement, et fonction de la vitesse.

Si le corps est de dimensions appréciables, et *s'il se meut dans le vide*, en se trouvant uniquement soumis à l'action de la pesanteur, nous pourrons lui appliquer le théorème du mouvement du centre de gravité [1]. Le raisonnement affectera ici deux formes bien distinctes, suivant qu'on admet la structure atomique de la matière dont il est formé, ou suivant qu'on

[1] Nous pouvons maintenant dire, sans inconvénient : « centre de *gravité* ».

regarde cette matière comme un milieu continu. Dans le premier cas, le problème à traiter relève de la dynamique des systèmes de points matériels : tous les atomes sont soumis à des forces extérieures $\vec{\Phi}$, imprimant à chacun d'eux une accélération g, dirigée suivant la verticale du lieu, et vers le bas, et à des forces intérieures régies par le principe d'égalité de l'action et de la réaction. D'après ces hypothèses, le centre de gravité sera animé, dans le cas le plus général, d'un mouvement parabolique.

Si l'on adopte le second point de vue, celui de la continuité, il faut modifier l'appareil analytique et substituer aux sommes finies des intégrales, aux points matériels des éléments matériels ([1]). Mais le résultat final est le même que dans le cas précédent.

21. Dans le premier cas, la masse mise en jeu dans les équations du mouvement du centre de gravité sera la somme des masses qui interviennent dans le système des équations qui définissent le mouvement de chaque atome. Dans le second cas, ce système sera remplacé par des équations aux dérivées partielles, dans lesquelles interviendra la densité de volume $\rho(x, y, z)$ s'il s'agit d'un milieu continu à trois dimensions ([2]). Par un calcul qu'on peut regarder comme limite de celui qui a été opéré dans le cas précédent, on pourra déduire

---

([1]) M. Painlevé utilise dans son enseignement la notion d'élément matériel; il la définit ainsi : une parcelle de matière dont les dimensions sont et restent assez petites pour que les positions, les vitesses et les accélérations de deux points quelconques de l'élément puissent être sensiblement confondues. Nous avons dégagé plus haut, à l'aide de la notion de voisinage, les hypothèses impliquées par une telle définition.

([2]) Il faudrait introduire la densité superficielle s'il s'agissait d'une surface flexible, la densité linéaire pour un fil.

encore de cette équation le mouvement du centre de gravité, et la masse mise en jeu sera l'intégrale triple de $\rho(x, y, z)$ étendue au volume matériel considéré.

Il suit de là que l'élément *masse* est un élément additif. A un certain point de vue, la masse est spécifique de la quantité de matière, en ce sens que si deux parcelles s'agrègent, la masse totale est la somme des deux masses primitives. Nous complétons cette idée de la masse en y ajoutant cet énoncé, que nous considérons comme justifié par l'expérience :

La masse est invariante dans toutes les compressions, dilatations et autres transformations subies par le corps, dans lesquelles il n'y a ni gain, ni perte de matière. La loi de Lavoisier étant admise, ces transformations peuvent être non seulement de nature physique, mais encore de nature chimique.

22. Il existe des systèmes matériels dont les éléments semblent rester à distance constante les uns des autres : ce sont les solides. Ce sont eux qui se prêtent le mieux à la vérification du théorème du mouvement du centre de gravité. Appliquons aussi à un solide, se mouvant dans le vide, et soumis à la seule action de son poids, le théorème du n° 11. Ici, les forces extérieures ont une résultante appliquée au centre de gravité. Donc le moment cinétique dans le mouvement autour de ce point demeure constant. Supposons en particulier que ce solide soit de révolution (géométriquement et matériellement) autour d'un axe, et que son mouvement initial autour du centre de gravité consiste en une rotation autour de cet axe : le moment cinétique initial est alors dirigé suivant cet axe et il en sera de même pendant toute la chute. Ce mouvement relatif sera donc une rotation d'axe fixe. Il en sera toujours ainsi, en particulier si le corps est une sphère formée de couches concentriques homogènes.

(*A suivre.*)