NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. DE LA ROËRE

Développables formées avec les normales d’une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 153-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__153_1>

[$L^2 8d$]

DÉVELOPPABLES FORMÉES AVEC LES NORMALES D'UNE QUADRIQUE [1];

PAR M. L. DE LA ROËRE.

Rappelons d'abord le théorème suivant :

« Les pôles d'un plan par rapport aux quadriques d'un faisceau homofocal sont sur une droite perpendiculaire à ce plan qu'elle rencontre à son point de contact avec la quadrique du faisceau à laquelle il est tangent. »

Soient maintenant trois quadriques homofocales Q, Q_1, Q_2 passant par un point P; le plan polaire de ce dernier par rapport à la quadrique Q_1 est le plan

[1] Plusieurs des résultats auxquels conduit l'analyse qui suit se trouvent dans la géométrie à trois dimensions de G. Salmon, mais ils sont obtenus par d'autres considérations.

tangent à cette surface au même point; or, par définition, ce plan est aussi tangent à la *polaire réciproque* de la quadrique Q par rapport à cette quadrique Q_1 et son point de contact P_1 avec cette polaire réciproque est, par réciprocité, le pôle du plan tangent en P à la quadrique Q; par application du théorème rappelé, ce point P_1 étant sur la perpendiculaire en P au plan tangent, la droite PP_1 est la normale en P à la quadrique Q et, par sa construction, cette droite est tangente à la quadrique Q_1 et à la polaire réciproque de la quadrique Q. En répétant le même raisonnement pour chaque point de la ligne de courbure tracée sur la surface Q par son homofocale Q_1, on voit que la développable formée par les normales de la quadrique Q le long de cette ligne de courbure est circonscrite non seulement à la quadrique Q_1, mais encore à la polaire réciproque de la quadrique Q par rapport à Q_1. La deuxième développable qui comprend la normale PP_1 est de même circonscrite à la polaire réciproque de la quadrique Q prise par rapport à l'homofocale Q_2 et la normale PP_1 est ainsi tangente en un point P_2 à cette deuxième polaire réciproque.

Les points P_1 et P_2 sont ainsi les pôles du plan tangent en P à la surface Q par rapport à ses deux homofocales passant en ce point; or on sait, par un théorème connu, que ces deux points sont les points focaux de la normale, ils sont donc aussi ses points de contact avec la surface des centres principaux de courbure ou *développée* de la quadrique Q; on en conclut que la ligne de contact d'une développable avec la polaire réciproque qui lui correspond est aussi pour cette dernière une ligne de contact avec la développée; donc :

Une normale d'une quadrique est tangente aux *deux polaires réciproques de cette surface prises par rapport à ses deux homofocales passant au pied de cette normale; les points de contact sont ses points focaux, et les plans tangents en ces points aux polaires réciproques respectives, les plans principaux qui se coupent suivant cette droite.*

Si nous considérons la série des lignes de courbure tracées sur la quadrique Q par ses homofocales Q_1 de même espèce, nous remarquerons que les paramètres de ces dernières surfaces variant d'une manière continue, il en est de même des polaires réciproques correspondantes et de leurs lignes de contact avec la développée, on en conclut que l'enveloppe de ces polaires réciproques est l'une des nappes de la développée; l'autre nappe est de même l'enveloppe des polaires réciproques de la quadrique Q par rapport aux diverses homofocales Q_2. Il existe en outre une troisième série de polaires réciproques, celles qui sont relatives aux homofocales de la quadrique Q de même espèce que cette dernière : elles correspondent à une troisième nappe de la développée, mais *cette nappe est imaginaire* et nous avons la proposition suivante :

La développée d'une quadrique est l'enveloppe des polaires réciproques de cette surface par rapport à toutes ses homofocales.

Pour particulariser les considérations générales qui précèdent, supposons que la quadrique Q est un ellipsoïde ayant pour équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

les coefficients satisfaisant à la condition

$$A > B > C,$$

sa polaire réciproque par rapport à une quadrique homofocale est représentée par l'équation

$$(2) \qquad \frac{Ax^2}{(A-\lambda)^2} + \frac{By^2}{(B-\lambda)^2} + \frac{Cz^2}{(C-\lambda)^2} = 1;$$

en la dérivant par rapport au paramètre λ, on a

$$(3) \qquad \frac{Ax^2}{(A-\lambda)^3} + \frac{By^2}{(B-\lambda)^3} + \frac{Cz^2}{(C-\lambda^3)} = 0;$$

par application de la proposition qui vient d'être établie, la développée de l'ellipsoïde est l'enveloppe des polaires réciproques (2) quand λ varie; par suite, l'élimination de ce paramètre entre les deux dernières équations donnera celle de cette développée ([1]).

La caractéristique qui correspond à la polaire réciproque de paramètre λ est l'intersection des deux surfaces représentées par ces équations, elle est aussi la ligne de contact de cette polaire réciproque avec la développable qui lui est circonscrite; cette ligne ne peut être réelle que si le cône défini par l'équation (3) est lui-même réel, c'est-à-dire si les trois différences $A-\lambda$, $B-\lambda$, $C-\lambda$ ne sont pas du même signe, condition qui exclut les valeurs de λ donnant les ellipsoïdes homofocaux; ces valeurs de λ correspondent, ainsi que nous l'avons déjà dit, à une nappe imaginaire de la développée.

Le moyen le plus simple pour définir cette développée consiste à employer les coordonnées tangentielles : l'équation (2) devient dans ce système de coordonnées

$$(4) \qquad \frac{(A-\lambda)^2}{A} u^2 + \frac{(B-\lambda)^2}{B} v^2 + \frac{(C-\lambda)^2}{C} w^2 = p^2,$$

([1]) Cette élimination de λ entre les équations (2) et (3) est aussi le procédé indiqué dans la géométrie de Salmon, mais cet auteur arrive à cette conclusion par une voie toute différente de celle employée ici.

elle est du second degré en λ; en exprimant que ses deux racines sont égales, on obtiendra comme on sait l'équation de l'enveloppe des surfaces qu'elle représente. En opérant ainsi et en posant pour abréger

$$\varphi^2 = \mathrm{A} - \mathrm{B}, \qquad \varphi_1^2 = \mathrm{A} - \mathrm{C}, \qquad \varphi_2^2 = \mathrm{B} - \mathrm{C},$$

on trouve pour l'équation tangentielle de la développée de l'ellipsoïde

$$(5) \qquad \varphi^2 \frac{4 v^2 w^2}{\mathrm{BC}} + \varphi_1^4 \frac{w^2 u^2}{\mathrm{CA}} + \varphi^4 \frac{u^2 v^2}{\mathrm{AB}} = p^2 \left[\frac{u^2}{\mathrm{A}} + \frac{v^2}{\mathrm{B}} + \frac{w^2}{\mathrm{C}}\right].$$

Un paramètre d'un hyperboloïde homofocal à l'ellipsoïde (1) étant désigné par λ, la développable qui est circonscrite à cet hyperboloïde l'est aussi, comme nous l'avons vu, à la polaire réciproque (2) de même paramètre; ces deux conditions déterminent la développable : en employant les coordonnées tangentielles, cette surface est ainsi définie par l'ensemble de l'équation (4) et de la suivante

$$(6) \qquad (\mathrm{A} - \lambda) u^2 + (\mathrm{B} - \lambda) v^2 + (\mathrm{C} - \lambda) w^2 = p^2;$$

mais elle est mieux représentée par le faisceau tangentiel

$$(7) \qquad \frac{1}{\mathrm{A}}(\mathrm{A} - \theta)(\mathrm{A} - \lambda) u^2 + \frac{1}{\mathrm{B}}(\mathrm{B} - \theta)(\mathrm{B} - \lambda) v^2 + \frac{1}{\mathrm{C}}(\mathrm{C} - \theta)(\mathrm{C} - \lambda) w^2 = p^2,$$

où λ est le même paramètre que dans les équations (4) et (6), c'est-à-dire un paramètre constant pour une même développable, l'autre paramètre θ donnant par sa variation toutes les quadriques véritables ou dégénérées inscrites à cette développable : pour $\theta = \lambda$ et pour $\theta = 0$, on retrouve bien les équations (4) et (6). Les valeurs A, B, C et ∞ de ce paramètre θ correspondent à quatre coniques doubles de la développable situées respectivement dans les plans principaux et dans celui de l'infini.

Considérons les huit plans isotropes dont les équations sont comprises dans la suivante :

$$(8) \qquad \pm \varphi_2 \sqrt{A}\, x \pm i \varphi_1 \sqrt{B}\, y \pm \varphi \sqrt{C}\, z = \varphi \varphi_1 \varphi_2 ;$$

ils coupent les plans principaux et celui de l'infini suivant des droites réelles ou imaginaires, qui sont les *normales aux ombilics* de la quadrique : ces huit plans contiennent chacun quatre de ces normales, dont une réelle. On reconnaîtra facilement que leurs coordonnées satisfont à l'équation (7) des développables, quelles que soient les valeurs de λ et de θ ; ils sont donc tous tangents.

On déduit de tout ce qui précède la proposition suivante :

Les développables formées avec les normales d'une quadrique ont chacune quatre coniques doubles situées respectivement dans les plans principaux et dans celui de l'infini; les coniques d'un même plan sont inscrites au quadrilatère des normales aux ombilics contenues dans ce plan, il en est de même des coniques focales de la quadrique.

Ces coniques focales sont d'ailleurs, comme les précédentes, les coniques doubles d'une développable imaginaire correspondant à la ligne de courbure imaginaire tracée sur la surface par sa ligne de contact avec la développable isotrope qui lui est circonscrite.

On reconnaîtra encore que les coordonnées des plans isotropes (8) satisfont à l'équation (5) de la développée et qu'elles annulent les dérivées de cette équation par rapport à u, v, w, p ; on en conclut que *ces huit plans isotropes sont des plans tangents multiples de la développée.*

Enfin, ces huit plans touchent la développée suivant ses coniques de rebroussement et chacune de ces dernières est inscrite au quadrilatère des normales aux ombilics de son plan.

Ces coniques de rebroussement sont imaginaires; on a facilement leurs équations, tant ponctuelles que tangentielles, par les règles connues.

Les lignes de courbure évitant les ombilics, il est évident que les normales en ces points n'appartiennent à aucune des développables; mais on voit, du moins en ce qui concerne les quadriques, que ces normales aux ombilics sont tangentes à toutes les développables.