Nouvelles annales de mathématiques

Maurice Roy

Sur les singularités d'un passage à la limite effectué dans la solution d'une équation aux dérivées partielles

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 321-327

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__321_0>

SUR LES SINGULARITÉS D'UN PASSAGE A LA LIMITE EFFECTUÉ DANS LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ;

PAR MAURICE ROY,
Ingénieur au Cops des Mines.

Un liquide visqueux continu et indéfini repose sans mouvement sur un plan horizontal $z = 0$.

A l'instant $t = 0$, on applique en chaque point du fluide une force constante, de grandeur k par unité de masse, parallèle à l'axe des x [1].

Le mouvement d'un point quelconque est défini, à chaque instant, par sa vitesse u parallèle à Ox. Celle-ci ne dépend que de z et de t et vérifie l'équation aux dérivées partielles du type parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1}$$

où ν désigne le coefficient de viscosité cinématique du liquide.

On suppose que le liquide adhère à tout instant au plan $z = 0$,

$$u(z, t) = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \quad t \geqq 0. \tag{2}$$

D'autre part, à l'instant initial $t = 0$, le fluide est en repos,

$$u(z, t) = 0 \quad \text{pour} \quad z \geqq 0, \quad t = 0. \tag{3}$$

[1] Ce problème a été étudié pour la première fois par M. J. Boussinesq (*Comptes rendus*, t. 90, 1880, p. 736).

La solution $u(z, t)$ qui vérifie (1) et satisfait aux conditions (2) et (3) est unique [1]. On peut l'obtenir très simplement de la façon suivante :

Posons [2]

$$u = kt\varphi(\zeta), \qquad \zeta = \frac{z}{\sqrt{\nu t}};$$

l'équation (1) devient une équation différentielle en $\varphi(\zeta)$

$$\varphi'' + \frac{1}{2}\zeta\varphi' - \varphi + 1 = 0, \tag{4}$$

dont la solution générale est

$$\varphi(\zeta) = 1 + A(\zeta^2 + 2) + B(\zeta^2 + 2)\int_0^\zeta \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2+2)^2}\,ds.$$

Les conditions aux limites (2) et initiales (3) déterminent les constantes A et B.

Un calcul facile montre que la solution cherchée peut s'écrire

$$u = kt\left[1 - \frac{1}{2\alpha}(\zeta^2 + 2)\int_\zeta^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2+2)^2}\,ds\right] = kt\varphi(\zeta), \tag{5}$$

α désignant la valeur, positive et inférieure à $\sqrt{\pi}$, de l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2+2)^2}\,ds$.

Étudions la variation de la fonction u lorsque le coeficient ν tend vers zéro.

---

(1) Nous invoquerons ici un certain nombre de propriétés classiques des équations du type considéré pour lesquelles on pourra se reporter à la Thèse de M. M. Gevrey (Paris, 1913).

(2) *Cf.* L. Lecornu, *Cours de Mécanique* professé à l'École Polytechnique, t. III; Gauthier-Villars, Paris, 1918.

Pour cela, il est intéressant de former $\frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$. On a

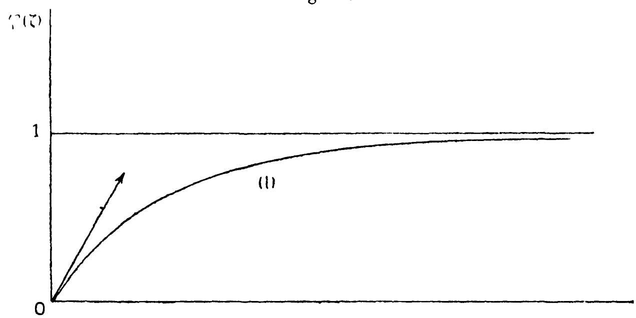
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\eta(z, t) = kt\,\varphi'(\zeta)\,\frac{1}{\sqrt{\nu t}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\varphi(\zeta) \quad + kt\varphi'(\zeta)\left[\frac{-z}{2t\sqrt{t}}\right].$$

En tenant compte, d'autre part, de la variation de la fonction $\varphi(\zeta)$ lorsque ζ varie de zéro à $+\infty$, il est aisé d'effectuer le passage à la limite envisagé.

L'allure de la fonction $\varphi(\zeta)$ est représentée par la courbe I de la figure 1.

Fig. 1.



Si l'on représente la fonction $u(z, t)$ par une surface, la déformation de celle-ci lorsque ν tend vers zéro est celle qu'indigne la figure 2.

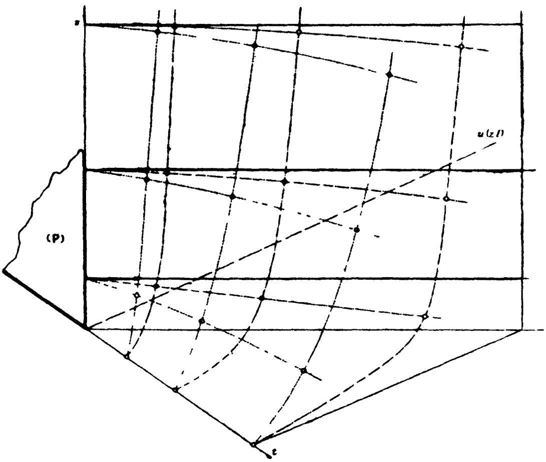
De même, on a représenté par les figures 3 et 4 l'allure de la déformation, dans les mêmes conditions, des surfaces $\eta(z, t) = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z}(z, t)$ représentant le « tourbillon » en chaque point du fluide.

$T_2 = -\nu\rho\frac{\partial u}{\partial z}(z, t)$ représentant l'effort tangentiel engendré par la viscosité et s'exerçant parallèlement à Ox sur un élément normal à Ox ($\rho =$ densité du fluide).

L'étude de ce passage à la limite donne lieu aux remarques suivantes :

1° Lorsque ν est différent de zéro, la solution $u(z, t)$ du problème est une fonction analytique, à

Fig. 2.



chaque instant, de la variable z. Cette fonction est aussi analytique, pour chaque valeur positive de z, de la variable t, lorsque t est positif. Mais cette dernière propriété n'est plus exacte pour l'instant initial $t = 0$.

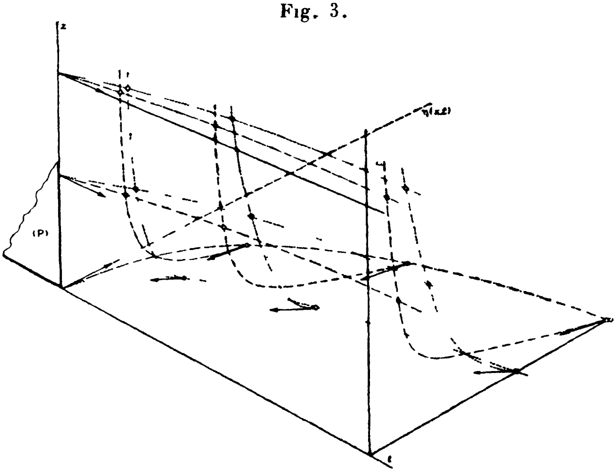
Si, pour z positif, on calcule les dérivées partielles successives par rapport à t, pour $t = 0$, de la fonction $\frac{u}{kt}$, on constate que celles-ci sont toutes nulles. On ne peut donc développer cette fonction, pour $t = 0$, en série de Taylor car la fonction se réfugierait tout entière dans le dernier terme du développement limité.

Lorsque ν tend vers zéro, la fonction $u(z, t)$ se réduit à la limite à

$$(6)\quad \begin{cases} u(z, t) = kt & \text{pour} \quad z > 0, \quad t \geqq 0, \\ u = 0 & \text{pour} \quad z = 0, \quad t \geqq 0, \end{cases}$$

et cette limite présente une double singularité. Pour z positif, la solution limite, considérée comme fonction de t, est analytique de cette variable, même pour $t = 0$. Par contre, pour t positif, elle n'est plus fonction analytique de la variable z que pour z positif. Elle perd en effet ce caractère d'analyticité pour $z = 0$.

Fig. 3.



2° La fonction $\eta(z, t)$ présente des particularités analogues à celles de la fonction $u(z, t)$. Sa limite, pour $\nu = 0$, se réduit à

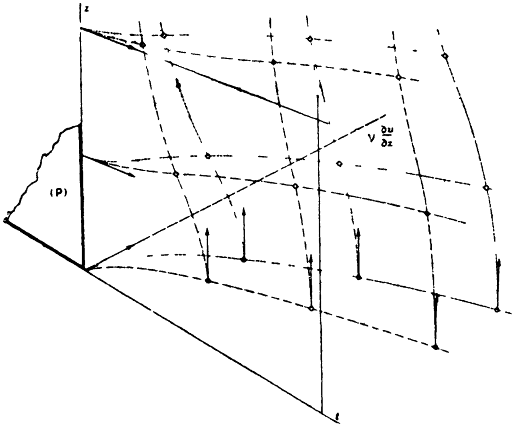
$$(7)\quad \begin{cases} \eta(z, t) = 0 & \text{pour} \quad z > 0, \quad t \geqq 0, \\ \eta(z, t) \text{ infini} & \text{pour} \quad z = 0, \quad t \geqq 0. \end{cases}$$

Le « flux de tourbillon » entre deux plans indéfinis normaux à Ox et distants de l'unité a pour expression

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial z}(z, t)\,dz = \frac{1}{2}\left\{[u(z, t)]_{z=\infty} - [u(z, t)]_{z=0}\right\}.$$

Lorsque ν tend vers zéro, il est aisé de constater que, bien que le tourbillon η augmente indéfiniment pour $z = 0$, le flux Φ reste fini pour toute valeur finie de t.

Fig. 4.



$\nu = \nu_1$

$\nu = \nu_2 < \nu_1$

$\nu = 0$

Plan (P) · solution du repos.

3° La fonction T_2 présente des particularités analogues à celles des fonctions u et η. Sa limite, pour $\nu = 0$, se réduit à

$$(8) \qquad T_2 = \nu\rho \frac{\partial u}{\partial z}(z, t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad z \geqq 0, \qquad t \geqq 0.$$

En d'autres termes, cette limite est identiquement nulle. Cette particularité est digne de retenir l'attention. Elle n'est nullement évidente *a priori* car, des deux facteurs variables ν et $\frac{\partial u}{\partial z}$ que comprend la fonction T_2, le premier tend vers zéro et le second augmente indéfiniment dans le passage à la limite considéré.

4° Enfin, on peut faire une dernière remarque. Si, dans l'équation du mouvement (1), on suppose directement $\nu = 0$, on obtient l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k, \tag{9}$$

dont la solution immédiate est

$$u = kt + \psi(z), \tag{10}$$

$\psi(z)$ étant une fonction arbitraire que la condition initiale (3) suffit à déterminer. Celle-ci montre en effet que la fonction ψ est identiquement nulle et la solution unique du problème est

$$u = kt. \tag{11}$$

C'est la solution indiquée par l'Hydrodynamique classique des liquides parfaits ou dénués de viscosité.

On voit que, suivant cette conception, la condition (2) est incompatible avec l'équation (9) et la condition (3). On ne peut, alors, imposer l'adhérence du liquide parfait à la paroi.

C'est à une conclusion opposée que nous sommes parvenus en effectuant le passage à la limite précédent, c'est-à-dire en faisant tendre ν vers zéro dans la solution (5) de l'équation (1) répondant aux conditions (2) et (3) et non dans cette équation elle-même. Les deux solutions *directe* et *limite* du problème correspondant au cas du liquide parfait $\nu = 0$ présentent donc la différence d'une singularité constituée, pour la seconde, par une discontinuité pour $z = 0$ ainsi que le fait ressortir la comparaison de (6) et (11).