Agrégation des sciences mathématiques (session de 1925)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 13-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__13_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1925).

Mathématiques Spéciales.

Une surface du second ordre (H) *a pour équation, en axes rectangulaires :*

$$\text{(H)} \qquad x(x-a)+y(y-mz)=0,$$

où a et m sont des constantes données.

Soient G_λ *et* G_μ *deux génératrices rectilignes de cette surface, de même système que* Oz, *et ayant pour équation :*

$$G_\lambda \begin{cases} x-a-\lambda y=0, \\ \lambda x+y-mz=0; \end{cases}$$

$$G_\mu \begin{cases} x-a-\mu y=0, \\ \mu x+y-mz=0. \end{cases}$$

I. *Former l'équation générale des surfaces du second ordre* $H_{\lambda\mu}$, *qui contiennent les deux droites* G_λ *et* G_μ *et qui sont coupées par le plan des xy suivant un cercle.*

Quelle est l'intersection de la surface (H) *et d'une des surfaces* $H_{\lambda\mu}$?

λ *et* μ *étant donnés, quel est le lieu géométrique des centres des surfaces* $H_{\lambda\mu}$?

II. *Montrer que le contour apparent d'une surface* $H_{\lambda\mu}$, *sur le plan* xOy, *parallèlement à* Oz, *est une conique* C *dont un foyer est à l'origine et dont l'axe focal est un axe de symétrie de cette surface.*

III. λ *et* μ *étant donnés, trouver les enveloppes de l'axe non focal et des directrices réelles de la conique* C.

IV. *Déduire de l'équation des surfaces* $H_{\lambda\mu}$ *l'équation générale des paraboloïdes* $P_{\lambda\mu}$, *qui admettent le plan* xOy *pour plan directeur, et passent par deux génératrices de la surface* (H), *de même système que* Oz.

Former l'équation tangentielle de ces mêmes surfaces.

Quel est le lieu géométrique S *des sommets des paraboloïdes* $P_{\lambda\mu}$ *qui passent par un point donné* P?

Quel est le lieu géométrique Σ *des sommets de ces paraboloïdes qui sont tangents à un plan donné* π?

S *restant fixe, quel est le lieu du point* P *correspondant?*

Σ *restant fixe, quelle est l'enveloppe du plan* π *correspondant?*

On examinera, en particulier, le cas où S *et* Σ *coïncident.*

V. *Supposant que la génératrice* G_μ *se rapproche indéfiniment de la génératrice* G_λ, *le paraboloïde* $P_{\lambda\mu}$ *a pour limite un paraboloïde* R_λ. *Soit* Δ *la génératrice principale de* R_λ, *qui n'est pas dans le plan* xOy.

Trouver la surface lieu de Δ, *quand* λ *varie. Étudier les sections de cette surface par des plans parallèles au plan* xOy.

VI. *Deux paraboloïdes* R_{λ_1}, R_{λ_2}, *dont les axes sont rectangulaires se coupent suivant une droite réelle, à distance finie.*

On demande d'étudier la surface engendrée par cette droite et de la comparer à (H).

Solution analytique par M. H. V.

I. Étant donnée la nature des questions posées, il est clair que, surtout dans les quatre premiers paragraphes, les coordonnées tangentielles simplifieront beaucoup l'exposé.

La quadrique H, qui n'est autre que le lieu de l'intersection des plans rectangulaires passant par les deux droites fixes ($x=a$, $y=0$; $x=0$, $y=mz$), ou par ces deux autres ($x=0$, $y=0$; $x=a$, $y=mz$), a pour équations, ponctuelle et tangentielle :

$$x(x-a)+y(y-mz)=0,$$
$$a^2w(mv+w)+m^2h(ua+h)=0.$$

Cette dernière s'obtient de suite en remarquant par exemple que H fait partie du faisceau tangentiel défini par les couples de sommets opposés du quadrilatère formé par les quatre droites citées plus haut.

Les quadriques $H_{\lambda\mu}$, coupant H suivant deux génératrices du même système, ont encore en commun avec elle deux autres génératrices de l'autre système, complétant un quadrilatère gauche ($\alpha\beta\gamma\delta$). Elles appartiennent donc, soit au faisceau ponctuel défini par H et deux plans tels que $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\alpha$; soit au faisceau tangentiel défini par H et deux points tels que $\alpha\gamma$.

La condition de l'énoncé (section circulaire dans le plan xOy) implique que les deux plans $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\alpha$, qui ont des équations de la forme

$$\lambda x+y-mz+\theta(x-a-\lambda y)=0,$$
$$\mu x+y-mz+\rho(x-a-\mu y)=0,$$

soient coupés par le plan $z=0$ suivant deux droites isotropes; et comme on peut toujours échanger au besoin λ avec μ, on doit donc avoir

$$\frac{\lambda+\theta}{1-\lambda\theta}=i, \qquad \frac{\mu+\rho}{1-\mu\rho}=-i,$$

d'où en général ($\lambda\neq i$, $\mu\neq -i$)

$$\theta=i, \qquad \rho=-i.$$

L'équation ponctuelle de $H_{\lambda\mu}$ est donc, A étant un paramètre arbitraire :

$$[\lambda x+y-mz+i(x-a-\lambda y)][\mu x+y-mz-i(x-a-\mu y)]$$
$$+A[x(x-a)+y(y-mz)]=0,$$

ce qui se met immédiatement sous la forme

$$\text{(I)}\quad F(x,y,z)=(K+\lambda\mu-1)(x^2+y^2)-m(\lambda+\mu)zx$$
$$-Kmyz-Kax+a(\lambda+\mu)y+m^2z^2+a^2=0,$$

en posant

$$K = A - i(\lambda - \mu) + 2.$$

D'autre part, l'un des sommets du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ est à l'intersection du plan

$$\lambda x + y - mz + i(x - a - \lambda y) = 0$$

avec la droite

$$x - a - \mu y = 0,$$
$$\mu x + y - mz = 0.$$

De ces trois équations on tire la combinaison évidente

$$(\lambda - \mu)x + i(\mu - \lambda)y = 0,$$

d'où $x = iy$ puisque les deux génératrices G_λ et G_μ sont distinctes; le point défini par les trois équations ci-dessus a les coordonnées homogènes suivantes :

$$(\alpha) \qquad ia, \quad a, \quad \frac{a}{m}(1 + i\mu), \quad i - \mu.$$

De même le sommet opposé à celui-là dans le quadrilatère a pour coordonnées

$$(\gamma) \qquad -ia, \quad a, \quad \frac{a}{m}(1 - i\lambda), \qquad -i - \lambda.$$

L'équation tangentielle des quadriques $H_{\lambda\mu}$ est donc

$$\begin{aligned} &A'[a^2 w(mv + w) + m^2 h(ua + h)] \\ &\quad + \left[iau + av + \frac{a}{m}(1 + i\mu)w + (i - \mu)h\right] \\ &\quad \times \left[-iau + av + \frac{a}{m}(1 - i\lambda)w - (i + \lambda)h\right] = 0, \end{aligned}$$

A' étant un paramètre; c'est-à-dire, en posant

$$K' = m^2 A' - i(\lambda - \mu) + 2,$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) \quad \Phi(u, v, w, h) &\equiv a^2(u^2 + v^2) + K' auh - a(\lambda + \mu)vh + (\lambda\mu - 1 + K')h^2 \\ &+ \frac{a^2}{m}(\lambda + \mu)wu + K'\frac{a^2}{m}vw + \frac{a^2}{m^2}(\lambda\mu - 1 + K')w^2 = 0. \end{aligned}$$

Les génératrices communes à $H_{\lambda\mu}$ et à H, autres que G_λ et G_μ, sont les génératrices de second système

$$y = sx, \quad x - a + s(y - mz) = 0$$

qui passent par les points (α) et (γ). Elles correspondent donc à $s = \mp i$, et par conséquent à

$$z = -\frac{a}{ms} = \pm \frac{a}{im};$$

ce sont deux droites isotropes horizontales rencontrant Oz.

Le centre de $H_{\lambda\mu}$ est en évidence sur (II); il a pour équation

$$\Phi'_h = 0,$$

soit

$$\text{(1)} \qquad K'au - a(\lambda + \mu)v + 2(\lambda\mu - 1 + K')h = 0,$$

ses coordonnées cartésiennes sont

$$\text{(C)} \qquad x = \frac{aK'}{2(\lambda\mu - 1 + K')}, \qquad y = -\frac{a(\lambda + \mu)}{2(\lambda\mu - 1 + K')}, \qquad z = 0,$$

et il décrit, quand K' varie, une droite du plan des xy; cette droite joint le point $\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ au point $\left(0, \frac{\lambda + \mu}{2(1 - \lambda\mu)}, 0\right)$.

II. On obtient l'équation tangentielle du contour apparent horizontal de $H_{\lambda\mu}$, en faisant $w = 0$ dans l'équation (II). Cela donne

$$\text{(D)} \quad \varphi(u, v, h) \equiv a^2(u^2 + v^2) + K'auh - a(\lambda + \mu)vh + (\lambda\mu - 1 + K')h^2 = 0,$$

c'est-à-dire une conique dont les deux foyers réels sont en évidence (l'équation étant de la forme $u^2 + v^2 + ff' = 0$). Ces foyers sont : $h = 0$ (l'origine) et

$$\text{(F)} \qquad K'au - a(\lambda + \mu)v + (\lambda\mu - 1 + K')h = 0.$$

Ce dernier point (F) est homothétique du centre de $H_{\lambda\mu}$, dans le rapport 2, par rapport à l'origine O. L'axe focal est donc OF. Cette droite OF est un axe de symétrie de la quadrique $H_{\lambda\mu}$, car elle passe en son centre, d'une part, et d'autre part sa direction est principale ; en effet le plan normal à OF, passant au centre C, a une équation de la forme

$$aK'x - a(\lambda + \mu)y + h_0 = 0,$$

avec des coordonnées

$$u_0 = aK', \qquad v_0 = -a(\lambda + \mu), \qquad w_0 = 0,$$

h_0 en résultant par l'équation (1).

Le pôle de ce plan a pour coordonnées Φ'_{u_0}, Φ'_{v_0}, Φ'_{w_0}, o; et ces coordonnées elles-mêmes s'écrivent :

$$2a^2u_0+K'ah_0,\quad 2a^2v_0-a(\lambda+\mu)h_0,\quad \frac{a^2}{m}(\lambda+\mu)u_0+K'\frac{a^2}{m}v_0;\ 0,$$

c'est-à-dire

$$u_0(2a^2+h_0),\quad v_0(2a^2+h_0),\quad 0,\quad 0.$$

Le pôle est donc à l'infini dans la direction u_0, v_0, o, c'est-à-dire dans la direction de OF, ce qu'il fallait démontrer.

III. L'axe non focal de la conique (D) est perpendiculaire à OC et passe par le centre. Ses coordonnées tangentielles dans le plan horizontal satisfont donc aux équations

$$K'au-a(\lambda+\mu)v+2(\lambda\mu-1+K')h=0$$

et

$$(\lambda+\mu)u+K'v=0.$$

L'élimination de K' fournit l'enveloppe de cet axe : c'est la parabole

$$\text{(G)}\qquad a(\lambda+\mu)(u^2+v^2)+2h[(\lambda+\mu)u+(1-\lambda\mu)v]=0,$$

dont le foyer ($h=0$) et la direction de l'axe [point à l'infini : $(\lambda+\mu)u+(1-\lambda\mu)v=0$] sont en évidence.

Si une directrice a pour coordonnées u, v, h, son pôle a les coordonnées ponctuelles φ'_u, φ'_v, φ'_h. On aura la directrice du foyer O, en écrivant que :

$$\varphi'_u=0,\qquad \varphi'_v=0,$$

c'est-à-dire

$$2a^2u+K'ah=0,$$
$$2a^2v-a(\lambda+\mu)h=0.$$

Cette directrice passe donc par le point fixe $\left(x=0, y=\frac{-2a}{\lambda+\mu}\right)$.

Le second foyer F avait pour équation l'équation (F); la directrice correspondante satisfera donc aux conditions

$$\frac{\varphi'_u}{aK'}=\frac{\varphi'_v}{-a(\lambda+\mu)}=\frac{\varphi'_h}{(\lambda\mu-1+K')},$$

c'est-à-dire

$$\frac{2au+K'h}{K'}=\frac{2av-(\lambda+\mu)h}{-(\lambda+\mu)}=\frac{K'au-a(\lambda+\mu)v+2(\lambda\mu-1+K')h}{(\lambda\mu-1+K')}.$$

En retranchant h des trois membres de cette double égalité, il vient d'abord

$$K' = -(\lambda + \mu)\frac{u}{v},$$

ce qui était évident d'avance puisque les deux directrices sont parallèles ; puis en éliminant K',

$$(\mathrm{P}_2) \quad a(\lambda + \mu)(u^2 + v^2) + \left(\frac{2av}{\lambda + \mu} + h\right)[(\lambda + \mu)u + (1 - \lambda\mu)v] = 0.$$

La seconde directrice réelle enveloppe donc une parabole dont le foyer est le point $\left(x = 0, y = \frac{2a}{\lambda + \mu}\right)$ et dont l'axe passe au point à l'infini

$$(\lambda + \mu)u + (1 - \lambda\mu)v = 0.$$

Cette parabole (P_2) résulte d'ailleurs de la parabole (P_1) par une translation $\left(\text{égale à } 0, \frac{2a}{\lambda + \mu}\right)$ et une homothétie de rapport 2.

IV. Pour trouver celles des surfaces $H_{\lambda\mu}$ qui sont des paraboloïdes (dont alors un plan directeur est nécessairement horizontal), il suffit ou bien de s'arranger pour que l'équation (I) contienne z en facteur dans ses termes du second degré, ce qui donne

$$K = 1 - \lambda\mu,$$

ou bien de s'arranger pour que la quadrique (II) soit tangente au plan de l'infini, c'est-à-dire que l'équation (II) n'ait pas de terme en h^2, ce qui donne

$$K' = 1 - \lambda\mu.$$

Les paraboloïdes $P_{\lambda\mu}$ ont donc pour équation ponctuelle

$$(\mathrm{P}'_{\lambda\mu}) \qquad \begin{aligned} &m(\lambda + \mu)zx + m(1 - \lambda\mu)yz + (1 - \lambda\mu)ax \\ &\quad - a(\lambda + \mu)y - m^2z^2 - a^2 = 0, \end{aligned}$$

et pour équation tangentielle

$$(\mathrm{P}''_{\lambda\mu}) \qquad \begin{aligned} \psi(u, v, w, h) \equiv{}& a(u^2 + v^2) + (1 - \lambda\mu)\left(uh + \frac{a}{m}vw\right) \\ &- (\lambda + \mu)\left(vh - \frac{a}{m}wu\right) = 0. \end{aligned}$$

L'équation ponctuelle, mise sous la forme

$$mz[(\lambda+\mu)x+(1-\lambda\mu)y-mz]+[(1-\lambda\mu)ax-a(\lambda+\mu)y-a^2]=0$$
$$(p_1p_2+p_3=0),$$

met en évidence les deux plans directeurs $p_1=0$, $p_2=0$ et le plan tangent au sommet $p_3=0$. Ce dernier sommet (s) est à l'intersection des trois plans p_1, p_2, p_3, c'est le point

$$(s)\qquad x=a\frac{1-\lambda\mu}{(1-\lambda\mu)^2+(\lambda+\mu)^2},\quad y=-\frac{a(\lambda+\mu)}{(1-\lambda\mu)^2+(\lambda+\mu)^2},\quad z=0.$$

On l'aurait aussi facilement déduit de l'équation (P''_μ), où le coefficient de h indique le point à l'infini sur l'axe; les quantités directrices de l'axe sont donc $1-\lambda\mu$, $-(\lambda+\mu)$, 0; le plan tangent perpendiculaire a donc pour coordonnées

$$u_0=1-\lambda\mu,\qquad v_0=-(\lambda+\mu),\qquad w_0=0,\qquad h_0=-a,$$

la quatrième coordonnée étant immédiatement déduite de l'équation (P''). Ensuite le sommet est le pôle de ce plan, et il a pour coordonnées

$$x=\frac{\psi'_{u_0}}{\psi'_{h_0}},\qquad y=\frac{\psi'_{v_0}}{\psi'_{h_0}},\qquad z=\frac{\psi'_{w_0}}{\psi'_{h_0}},$$

ce qui redonne les formules (s).

Si le paraboloïde $(P_{\lambda\mu})$ passe par un point fixe, on a, d'après l'équation (P'), une relation linéaire entre $(1-\lambda\mu)$ et $(\lambda+\mu)$, de la forme

$$A(1-\lambda\mu)-B(\lambda+\mu)+C=0.$$

L'élimination de $(1-\lambda\mu)$ et $(\lambda+\mu)$ entre cette équation et les équations (s) donne immédiatement

$$(S)\qquad a(Ax+By)+C(x^2+y^2)=0.$$

Le lieu S du sommet (s) est donc un cercle du plan $z=0$.

Si le paraboloïde P reste tangent à un plan fixe, on a, d'après l'équation (P''), une relation linéaire entre $(1-\lambda\mu)$ et $(\lambda+\mu)$, de la forme

$$A'(1-\lambda\mu)-B'(\lambda+\mu)+C'=0,$$

d'où encore le lieu

$$(\Sigma)\qquad a(A'x+B'y)+C'(x^2+y^2)=0,\qquad z=0.$$

C'est un cercle Σ.

Si S est donné, c'est que (A, B, C) sont donnés (à un facteur près); on a donc d'après (P′), (x, y, z) désignant le point fixé,

$$\frac{myz + ax}{A} = \frac{-mzx + ay}{B} = \frac{-m^2z^2 - a^2}{C};$$

des combinaisons évidentes montrent que ces trois rapports sont encore égaux aux deux suivants :

$$= \frac{y(m^2z^2 + a^2)}{Amz + Ba} = \frac{x(m^2z^2 + a^2)}{Aa - Bmz}.$$

Le lieu du point (x, y, z) dans ces conditions comprend donc, outre les deux plans imaginaires $m^2z^2 + a^2 = 0$, la droite d'équations :

$$Amz + Ba + Cy = 0;$$
$$Bmz - Aa - Cx = 0.$$

Si le cercle Σ reste fixe, c'est que (A′, B′, C′) sont donnés (à un facteur près). On a alors, d'après P″, entre les coordonnées du plan fixé π :

$$\frac{uh + \frac{a}{m}vw}{A'} = \frac{vh - \frac{a}{m}wu}{B'} = \frac{a(u^2 + v^2)}{C'};$$

des combinaisons simples montrent que ces trois rapports sont égaux encore à

$$= \frac{h(u^2 + v^2)}{A'u + B'v} = \frac{\frac{a}{m}w(u^2 + v^2)}{A'v - B'u}.$$

L'enveloppe du plan π comprend donc, outre les deux points cycliques $u^2 + v^2 = 0$ du plan horizontal, la *droite* définie par les deux points

$$a(A'u + B'v) - C'h = 0,$$
$$m(A'v - B'u) - C'w = 0.$$

Un plan passant par cette droite a pour équation

$$ux + vy + \frac{m}{C'}(A'v - B'u)z + \frac{a}{C'}(A'u + B'v) = 0,$$

ou encore

$$u[B'mz - A'a - C'x] - v[A'mz + B'a + C'y] = 0.$$

On voit donc que, si S et Σ coïncident, c'est-à-dire si A′, B′, C′, sont proportionnels à A, B, C, la droite enveloppe du plan π se confond avec la droite lieu du point (x, y, z).

V. La dernière partie se traite aisément en coordonnées ponctuelles. On a l'équation du paraboloïde R_λ en faisant tendre μ vers λ dans l'équation ci-dessus $P'_{\lambda\mu}$, ce qui donne

$$(R_\lambda) \quad mz[2\lambda x + (1-\lambda^2)y - mz] + (1-\lambda^2)ax - 2a\lambda y - a^2 = 0.$$

Le plan tangent au sommet est en évidence comme on l'a déjà fait remarquer, c'est le plan

$$(1-\lambda^2)x - 2\lambda y - a = 0$$

(qui est bien normal aux deux plans directeurs). La génératrice principale non horizontale est donc

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} (1-\lambda^2)x - 2\lambda y - a = 0, \\ 2\lambda x + (1-\lambda^2)y - mz = 0. \end{cases}$$

En éliminant λ, il vient le lieu de Δ quand λ varie :

$$4(x^2+y^2)^2 - (mzx - ay)^2 = 4(x^2+y^2)(ax+myz).$$

C'est une surface du quatrième degré, dont les sections par $z = \text{const.}$ sont des quartiques bicirculaires ayant un point de rebroussement à l'origine. Passant aux coordonnées polaires (ρ, θ), l'équation de ces sections est

$$4\rho^4 - \rho^2(mz\cos\theta - a\sin\theta)^2 - 4\rho^3(a\cos\theta + mz\sin\theta) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2\rho - a\cos\theta - mz\sin\theta)^2 = m^2z^2 + a^2.$$

Les courbes $z = \text{const.}$ sont donc des cardioïdes, podaires de circonférences rencontrant Oz, et de rayon $\frac{1}{4}\sqrt{m^2z^2+a^2}$.

VI. L'axe du paraboloïde R_λ est dirigé par

$$\lambda^2 - 1, \quad 2\lambda$$

Deux paraboloïdes à axes rectangulaires satisferont donc à la condition

$$(\lambda_1^2 - 1)(\lambda_2^2 - 1) + 4\lambda_1\lambda_2 = 0,$$

ce qui se met de suite sous la forme

$$1 + \lambda_1 \lambda_2 = \pm (\lambda_1 - \lambda_2).$$

D'autre part, il passe en un point (x, y, z) deux paraboloïdes R_λ, dont les valeurs du paramètre λ correspondant, sont les racines de l'équation du second degré

$$\lambda^2(myz + ax) - 2\lambda(mzx - ay) + m^2 z^2 + a^2 - myz - ax = 0.$$

On en conclut

$$1 + \lambda_1 \lambda_2 = \frac{m^2 z^2 + a^2}{myz + ax},$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 4\frac{(mzx - ay)^2}{(myz + ax)^2} - 4\frac{m^2 z^2 + a^2}{myz + ax} + 4.$$

En portant dans la relation ci-dessus, on trouve de suite le lieu des points communs à R_{λ_1} et R_{λ_2}

$$(m^2 z^2 + a^2)[4(x^2 + y^2) - 4(myz + ax) - (m^2 z^2 + a^2)] = 0,$$

qui se décompose en $m^2 z^2 + a^2 = 0$ et en la quadrique

$$H - \frac{1}{4}(m^2 z^2 + a^2) = 0;$$

c'est un hyperboloïde à une nappe, qui coupe H suivant deux circonférences, d'ailleurs imaginaires.