Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 252-254

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__252_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 61. — 1° *Trouver les solutions communes aux deux équations*

$$(x+pz)^2+(y+qz)^2=R^2, \qquad x+pz=R\cos\alpha,$$

R *et* α *étant deux constantes données.*

2° *Trouver l'intégrale générale de la première de ces équations.*

3° *Déterminer les surfaces* S *telles que la normale en chacun de leurs points rencontre le cercle*

$$z=0, \qquad x^2+y^2=R^2.$$

Quelle est l'équation de la surface de la famille qui passe par la droite

$$y = 0, \qquad z = R.$$

4° *Les surfaces* S *peuvent être considérées comme l'enveloppe d'une famille de sphères que l'on définira géométriquement. Montrer qu'il existe une surface* Σ *de la famille* S *pour laquelle les sphères précédentes ont toutes pour rayon* R.

5° *Déterminer les lignes de courbure des surfaces* S.

6° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques des surfaces* S. *Intégrer cette équation quand la surface* S *considérée est la surface* Σ *du n° 4°.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *En un point* M *d'une courbe gauche* Γ, *on considère le plan* P *passant par* M *et perpendiculaire à la normale principale.*

Ce plan enveloppe une surface développable S. *On demande :*

a. Les équations de la génératrice D *de* S *qui passe par* M;

b. L'angle de D *avec la tangente en* M *à* Γ;

c. De montrer que D *est le support d'un vecteur dont les projections sur la tangente et la binormale ont pour valeurs algébriques* R *et* — T, R *et* T *étant les rayons de courbure et de torsion.*

C. 62. — II. *Évaluer l'aire de la surface*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2.$$

(Grenoble, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 63. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$(1 + q^2)z = px.$$

1° *Déterminer les multiplicités caractéristiques de l'équation.*

2° *Trouver les surfaces intégrales qui passent par la parabole*

$$x^2 = 2z, \qquad y = 0.$$

3° *Déterminer toutes les surfaces intégrales développables.*

C. 64. — II. *Les équations*

$$x = \frac{u - v}{2} + \rho\,\frac{u + v}{2}, \qquad y = \frac{u + v}{2} - \rho\,\frac{u - v}{2}, \qquad z = \rho\,\frac{u^2 + v^2}{2a},$$

où ρ *désigne un paramètre variable, représentent une droite* (D); *a dénotant une longueur donnée,* (D) *dépend de deux paramètres variables, u et v.*

1° *Montrer qu'on peut établir entre u et v une infinité de relations* *telles que les droites* (D) *correspondant à chacune d'elles restent tangentes à une même courbe* (Γ); *quelles sont les projections des courbes* (Γ) *sur le plan* xOy?

2° *Montrer que lorsque* u *et* v *varient de toutes les manières possibles, la droite* (D) *reste tangente à deux surfaces du second degré.*

3° *Rechercher s'il existe des surfaces* (Σ) *admettant pour normales les droites* (D).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer par la méthode des résidus l'intégrale définie*

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt[5]{x^4(1-x)}},$$

où le chemin d'intégration et le radical sont réels.

INDICATIONS. — Un contour classique, enveloppant les points 0 et 1, donne

$$\mathrm{I} = \frac{28\pi}{25 \sin\frac{\pi}{5}}.$$

(Poitiers, novembre 1925.)