ILIOVICI

Quelques remarques sur les déterminants et les matrices

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 129-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__129_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LES DÉTERMINANTS ET LES MATRICES ;

Par ILIOVICI.

Dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (numéros d'octobre et de novembre 1923), j'ai montré comment on pourrait établir la théorie des déterminants en partant de la définition suivante :

On appelle déterminant d'ordre n, un polynome fonction des n^2 lettres du tableau

$$T = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^k & \dots & a_1^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^k & \dots & a_2^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^k & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

qui satisfait aux trois conditions suivantes :

1° Il est fonction linéaire et homogène des éléments d'une même ligne ;

2° Il change de signe lorsqu'on change entre eux les éléments respectifs de deux lignes consécutives ;

3° Il est égal à l'unité, quand tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à l'unité, tous les autres étant nuls.

J'ai démontré dans l'article cité l'existence d'un pareil polynome, et son unicité. Il en résulte que chaque fois qu'on peut établir les trois conditions précédentes, on est assuré de se trouver en présence d'un déterminant.

La deuxième condition peut d'ailleurs être remplacée par la suivante, qui lui est équivalente :

Un polynome qui satisfait aux conditions 1° et 3° et qui est nul lorsque deux lignes sont composées des mêmes éléments, satisfait aussi à la condition 2° et est un déterminant.

C'est en partant de cette définition que j'ai démontré le théorème sur le produit de deux déterminants.

On peut aussi essayer de généraliser la notion de déterminant et l'appliquer aux matrices.

Étant donné un tableau rectangulaire :

$$M = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^k & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & \dots & a_2^k & \dots & a_2^n \\ a_p^1 & \dots & a_p^k & \dots & a_p^n \end{vmatrix},$$

on appelle matrice déduite de ce tableau et l'on désigne par

$$\| a_p^n \|$$

tout polynome fonction des lettres de ce tableau qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Il est fonction linéaire et homogène des éléments d'une même ligne.

2° Il change de signe lorsqu'on change entre eux les éléments respectifs de deux lignes consécutives.

Il est facile de démontrer que si $p > n$ la matrice est en général nulle, et pour $p \leqq n$ la matrice est une fonction linéaire et homogène de tous les déterminants d'ordre p que l'on peut tirer du tableau [1].

Nous allons nous servir de cette remarque pour établir les propositions qui vont suivre :

Produit de deux matrices. — Étant données deux matrices

$$\| a_p^n \| \quad \text{et} \quad \| b_p^n \|$$

et le déterminant

$$| C_\mu^\mu | = \begin{vmatrix} c_1^1 & \dots & c_\mu^\mu \\ \dots & \dots & \dots \\ c_\mu^1 & \dots & c_\mu^\mu \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$c_i^k = a_i^1 b_k^1 + \dots + a_i^n b_k^n,$$

on dit que $| C_\mu^\mu |$ est le produit des deux matrices et l'on démontre qu'il est la somme des produits de tous les déterminants formés par les colonnes de même rang tirés des deux matrices.

---

(1) Voir la *Revue de Mathematiques spéciales*, mars et avril 1927.

La démonstration se fait en remarquant que $|c_p^n|$ est par ses lignes une fonction linéaire des éléments de chaque ligne de $\| a_p^n \|$ qui change de signe lorsqu'on transpose deux des lignes de cette matrice et qu'il jouit par ses colonnes des mêmes propriétés par rapport aux lignes de $\| b_p^n \|$.

Il en résulte que le déterminant est une fonction linéaire des déterminants qui composent la première matrice, et aussi une fonction linéaire de ceux de la deuxième.

Si dans une des matrices on annule tous les éléments autres que ceux qui forment un déterminant de $\| a_p^n \|$, on constate que $|c_p^n|$ est égal au produit de ce déterminant par le déterminant du même rang de $\| b_p^n \|$, et ceci démontre la proposition.

Produit réduit de deux matrices. — Étant données les deux matrices

$$\| a_p^{n+1} \| \quad \text{et} \quad \| b_p^{n+1} \|,$$

déduites des deux précédentes par l'adjonction d'une $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne, j'appellerai produit réduit à la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne de ces deux matrices, la somme des produits de tous les déterminants de même rang tirés de ces deux matrices, chacun de ces déterminants contenant la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne.

Je désignerai ce produit par

$$\| a_p^{n+1} \times b_p^{n+1} \|_{n+1}.$$

THÉORÈME. — *Si l'on considère le déterminant*

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{ccc|c} & & & a_1^{n+1} \\ & & & \cdots \\ & C_p^p & & \cdots \\ & & & \cdots \\ & & & a_p^{n+1} \\ \hline b_1^{n+1} & \ldots & b_p^{n+1} & 0 \end{array}\right|,$$

on a

$$\Delta_1 = - \| a_p^{n+1} \times b_p^{n+1} \|_{n+1}.$$

La démonstration est la même que dans le cas précédent. Il y a lieu simplement de faire remarquer que Δ_1 ne peut contenir que des déterminants de $\| a_p^{n+1} \|$ qui contiennent la dernière colonne, puisqu'il s'annule lorsque les éléments de cette colonne sont nuls.

La vérification du signe peut se faire en attribuant aux éléments des deux diagonales principales (dans deux déterminants du même rang) des valeurs égales à l'unité, les autres éléments étant nuls.

Cette proposition peut être généralisée.

On désigne par

$$\| a_p^q \times b_p^q \|_{n+1\ldots q}$$

le produit réduit de deux matrices, qui est la somme des produits des déterminants de même rang qui contiennent tous les q dernières colonnes des deux matrices, et par Δ_p le déterminant

$$\Delta_p = \left| \begin{array}{ccc|ccc} & & & a_1^{n+1} & \ldots & a_1^q \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & C_p^p & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_p^{n+1} & \ldots & a_p^q \\ \hline b_1^{n+1} & \ldots & b_p^{n+1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_1^q & \ldots & b_p^q & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right|$$

On démontrerait de la même manière la relation

$$\Delta_p = (-1)^q \| a_p^q \times b_p^q \|_{n+1\ldots q}.$$

Formule analogue à celle de Lagrange. — Étant donnée la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & \ldots & a_2^n \end{matrix} \right\| = \| a_2^n \|$$

et la matrice

$$\| a_1^{n+1} \| = \| a_1^1 \ldots a_1^n \quad a_1^{n+1} \|$$

où l'on pose

$$a_1^{n+1} = a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2 + \ldots + a_1^n a_2^n,$$

la formule de Lagrange

$$\Sigma(a_1^i a_2^k - a_1^k a_2^i)^2 = \Sigma(a_1^i).\| (a_2^n)^2 \| - \Sigma(a_1^i a_2^i)^2$$

peut s'écrire avec notre notation

$$\| (a_2^n)^2 \| = \Sigma(a_1^i)^2 . \Sigma(a_2^k)^2 - \| (a_1^{n+1})^2 \|_{n+1}.$$

C'est cette formule qu'il s'agit de généraliser :

Si l'on considère les deux matrices

$$\| a_p^n \| \quad \text{et} \quad \| a_{p-1}^{n+1} \|,$$

où l'on a posé pour la dernière colonne de la deuxième matrice

$$a_k^{n+1} = a_k^1 a_p^1 + \ldots + a_k^n a_p^n,$$

on a la relation

$$\| (a_p^n)^2 \| = [(a_p^1)^2 + \ldots + (a_p^n)^2] \cdot \| (a_{p-1}^n)^2 \| - \| (a_{p-1}^{n+1})^2 \|_{n+1}.$$

En effet, si l'on désigne par Δ et D les déterminants qui représentent les carrés de $\| a_p^n \|$ et de $\| a_n^{p-1} \|$, on peut écrire, en tenant compte de la valeur de a_k^{n+1},

$$\Delta = \left| \begin{array}{c|c} D & \begin{matrix} a_1^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{p-1}^{n+1} \end{matrix} \\ \hline a_1^{n+1} \quad \ldots \quad a_{p-1}^{n+1} & (a_p^1)^2 + \ldots + (a_p^n)^2 \end{array} \right|,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\Delta = [(a_p^1)^2 + \ldots + (a_p^n)^2] D + \left| \begin{array}{c|c} D & \begin{matrix} a_1^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{p-1}^{n+1} \end{matrix} \\ \hline a_{p-1}^{n+1} \quad \ldots \quad a_{p-1}^{n+1} & 0 \end{array} \right|.$$

Or, en vertu du théorème précédent, le deuxième terme du deuxième membre est bien égal à $-\| (a_{p-1}^{n+1})^2 \|_{n+1}$, et la proposition se trouve ainsi démontrée.

Théorème de M. Hadamard. — Étant donnée une matrice $\| a_p^n \|$, on a toujours

(1) $$\| (a_p^n)^2 \| \leqq \Sigma (a_1^i)^2 . (\Sigma a_2^i)^2 \ldots \Sigma (a_p^i)^2,$$

l'égalité ayant lieu lorsque les suivantes sont satisfaites :

(2) $$\sum_{r=1}^{i=n} a_r^i a_s^i = 0 \begin{pmatrix} r = 1, \ldots, p \\ s = 1, \ldots, p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r \neq s.$$

Cette relation est évidente dans le cas $p = 2$, puisqu'elle est une conséquence de la formule de Lagrange.

En l'admettant dans le cas d'une matrice à $p - 1$ lignes, on a

(3) $$\| (a_{p-1}^n)^2 \| < \Sigma (a_1^i)^2 . \Sigma (a_2)^2 \ldots \Sigma (a_{p-1}^i)^2,$$

l'égalité ayant lieu lorsque les relations (2) sont satisfaites pour toutes les valeurs de r et de s comprises entre 1 et $p-1$. Mais, en vertu de l'égalité établie, on a

$$\|(a_p^n)^2\| = \|(a_{p-1}^n)^2\|.\Sigma(a'_p)^2 - \|(a_{p-1}^{n+1})^2\|_{n+1},$$

d'où

$$\|(a_p^n)^2\| \leqq \|(a_{p-1}^n)^2\|.\Sigma(a_p^i)^2,$$

l'égalité ayant lieu lorsque les relations (2) sont satisfaites pour $r=1, 2, \ldots, p-1$ et $s=p$.

En remplaçant $\|(a_{p-1}^n)^2\|$ par le deuxième membre de l'inégalité (3), on démontre la formule (1) qui, dans le cas où $n=p$, c'est-à-dire dans le cas d'un déterminant, n'est autre chose que le théorème de M. Hadamard.

La démonstration précédente suppose des éléments réels, mais on peut facilement étendre le théorème aux quantités complexes. Il suffit de remplacer le carré d'une matrice par le produit de cette matrice par la conjuguée. Tout carre qui intervient dans la formule se trouve alors remplacé par le carré du module.

Limite du carré d'une matrice. — Étant donnée une matrice $\|a_p^n\|$, on peut supposer que n croît indéfiniment, p restant fixe; dans ce cas $\|(a_p^n)^2\|$ devient une série multiple d'ordre p à termes tous positifs.

Théorème. — *Si les séries $\Sigma(a_1^n)^2, \ldots, \Sigma(a_p^n)^2$, à termes tous positifs sont convergentes, il en est de même de la série multiple représentée par $\|(a_p^n)^2\|$ lorsque n croît indéfiniment.*

Ceci est une conséquence de l'inégalité (1).

On peut d'ailleurs ajouter que si les séries $\Sigma a_p^n a_s^n$ sont convergentes et ont des sommes nulles pour $r \neq s$ et $r=1, \ldots, p$, $s=1, \ldots, p$, on obtient la somme de $\|(a_p^n)^2\|$ en faisant le produit des séries $\Sigma(a_1^n)^2, \ldots, \Sigma(a_p^n)^2$.

Dans le cas où p croît aussi indéfiniment, le théorème précédent doit être un peu modifié.

Il devient, si nous remplaçons dans la *matrice* a_2^2 par $1+a_2^2$ [1] :

Si la série Σa_i^i est absolument convergente, ainsi que la

[1] Théorème de Helge von Koch.

série à double entrée $\Sigma\Sigma(a_h^k)^2$, *il en est de même de la série multiple* $\|(a_p^n)^2\|$ *lorsque n et p croissent indéfiniment.*

Pour la démonstration de ce théorème, on se sert du lemme suivant :

Si la suite a_n à termes positifs est bornée supérieurement et si à partir d'une certaine valeur de n $\frac{a_{n+p}}{a_n}$ *a sa plus grande limite, inférieure ou égale à l'unité, la suite a_n a une limite lorsque n croît indéfiniment.*

Ceci est évident si la plus grande des limites est inférieure à 1, car alors a_n tend vers zéro, comme le terme général d'une série convergente.

Dans le cas général, étant donné un nombre ε, on aura, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} < 1 + \varepsilon,$$

quel que soit le nombre p.

Si a_n n'a pas de limite, comme la suite est bornée, soient μ et λ la plus petite et la plus grande limite de a_n,

$$\mu < \lambda \leqq 1.$$

On peut alors choisir n et $n+p$ de telle manière que l'on ait

$$u_{n+p} > \lambda - \eta,$$
$$u_n < \mu + \eta,$$

et l'on peut choisir η suffisamment petit de manière que

$$\frac{\lambda - \eta}{\mu + \eta} > 1 + \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{u_{n+p}}{u_n} > 1 + \varepsilon,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Revenons à la démonstration du théorème.

Posons

$$A_k = (a_k^1)^2 + (a_k^2)^2 + \ldots + (a_k^n)^2 + \ldots.$$

La série A_k est convergente, et si l'on désigne par

$$\|(a_p)^2\|^2$$

ce que devient $\|(a_p^n)^2\|$ lorsque n croît indéfiniment, on a

$$\|(a_p)^2\| \leqq (1 + 2\,|a_1^1| + A_1)(1 + 2\,a_1^2 + A_2)\ldots(1 + 2\,a_p^p + A_p).$$

Or, étant données nos hypothèses, le produit du deuxième membre est convergent et a une limite P.

On a donc

$$\|(a_p)^2\| \leqq P.$$

La suite $\|(a_p)^2\|$ est donc bornée supérieurement.

D'un autre côté on a

$$\|(a_{p+g})^2\| \leqq \|(a_p)^2\| \prod_{k=1}^{k=g} [1 + 2\,|a_{p+k}^{p+k}| + A_{p+k}],$$

d'où

$$\frac{\|(a_{p+k})^2\|}{\|(a_p)^2\|} \leqq \prod_{k=1}^{k=g} (1 + 2\,|a_{p+k}^{p+k}| + A_{p+k})$$

et l'on peut choisir p suffisamment grand de manière à avoir

$$\prod_{k=1}^{k=g} 1 + 2\,|a_{p+k}^{p+k}| + A^{p+k} < 1 + \varepsilon.$$

On en déduit, comme conséquence du lemme précédent, que la suite $\|(a_p)^2\|$ a une limite.

Remarque. — Il est facile d'étendre ce qui précède au domaine imaginaire.