Nouvelles annales de mathématiques

P. Vincensini

Sur les couples de contours fermés de même longueur et de même surface

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 199-202

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__199_0>

SUR LES COUPLES DE CONTOURS FERMÉS DE MÊME LONGUEUR ET DE MÊME SURFACE;

PAR P. VINCENSINI.

I. *Établissement d'une correspondance par aires constantes entre deux points d'un plan.* — Envisageons dans un plan deux courbes fixes quelconques (C) et (C′), que nous supposerons formées d'un nombre fini d'arc analytiques, et une droite variable (Δ) coupant (C) et (C′) en M et M′.

Nous allons montrer que si P et P′ constituent un couple quelconque de points de (Δ) symétriques par rapport au milieu de MM′, assujetti à cette condition que pendant le déplacement de (Δ) (déplacement quelconque à deux paramètres), les segments déterminés par M, M′, P et P′ sur (Δ) conservent leurs rapports mutuels, la correspondance ainsi établie entre P et P′ est *une correspondance par aires constantes*.

Soient en effet u et v les paramètres fixant les positions des points M et M′ sur (C) et (C′),

$$\mathrm{M}\begin{cases} x = x(u), \\ y = y(u), \end{cases} \qquad \mathrm{M}'\begin{cases} x' = x'(v), \\ y' = y'(v). \end{cases}$$

Si l'on pose $\lambda = -\dfrac{\overline{\mathrm{PM}}}{\overline{\mathrm{PM}'}}$, les coordonnées des points P et P′ sont

$$\mathrm{P}\begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{x+\lambda x'}{1+\lambda}, \\[2ex] \mathrm{Y} = \dfrac{y+\lambda y'}{1+\lambda}, \end{cases} \qquad \mathrm{P}'\begin{cases} \mathrm{X}' = \dfrac{x'+\lambda x}{1+\lambda}, \\[2ex] \mathrm{Y}' = \dfrac{y'+\lambda y}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Le calcul de l'élément d'aire décrit par P donne

$$ds_{\mathrm{P}} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\left|\frac{dx}{du}\frac{dy'}{dv} - \frac{dy}{du}\frac{dx'}{dv}\right| du\, dv.$$

La forme du résultat montre que $ds_{\mathrm{P}'}$ a la même valeur.

La correspondance entre P et P′ est bien une correspondance par aires constantes comme nous l'avions annoncé [1].

II. Supposons maintenant que M et M′ se déplacent, non plus indépendamment l'un de l'autre sur (C) et (C′), mais de façon à décrire des arcs homologues *égaux*. Dans ce cas P et P′ décrivent deux courbes (Γ), (Γ′) du plan. Il est aisé de montrer que (Γ) et (Γ′) se correspondent avec *égalité* des arcs homologues.

On a en effet en désignant par ds l'élément d'arc décrit par P, et par ds' l'élément d'arc homologue décrit par P′,

$$ds^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left[dx^2 + dy^2 + \lambda^2(dx'^2 + dy'^2) + 2\lambda(dx\,dx' + dy\,dy')\right],$$

$$ds'^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left[dx'^2 + dy'^2 + \lambda^2(dx^2 + dy^2) + 2\lambda(dx\,dx' + dy\,dy')\right].$$

Si $dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$ on a bien : $ds^2 = ds'^2$.

Les différents couples de points tels que P, P′, correspondant aux différentes valeurs de λ, établissent donc sur les courbes qu'ils décrivent des correspondances par égalité d'arcs. Ce résultat s'établit d'ailleurs simplement par la géométrie.

III. Supposons enfin que (C) et (C′) soient deux contours fermés de même longueur, et que M et M′ décrivent (C) et (C′) en parcourant des arcs égaux. P et P′ décrivent alors eux aussi deux contours fermés (Γ), (Γ′) *de même longueur. A quelle condition* (Γ) *et* (Γ′) *auront-ils aussi même aire?*

Si l est la longueur commune à (C) et à (C′), et si l'on suppose (x, y), (x', y') exprimés en fonction de l'arc s de (C) ou de (C′), on aura, après un calcul facile, pour les expressions des surfaces limitées par (C) et (C′),

$$S_c = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\int_0^l (x\,dy - y\,dx) + \lambda(x\,dy' + x'\,dy - y\,dx' - y'\,dx) + \lambda^2(x'\,dy' - y'\,dx'),$$

$$S_{c'} = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\int_0^l (x'\,dy' - y'\,dx') + \lambda(x'\,dy + x\,dy' - y'\,dx - y\,dx') + \lambda^2(x\,dy - y\,dx).$$

---

[1] La correspondance simple ci-dessus est en relation avec l'étude des congruences rectilignes à surface moyenne plane (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1927, en cours d'impression).

S_c sera égale à $S_{c'}$ si

$$\int_0^l (x\,dy - y\,dx) + \lambda^2 \int_0^l (x'\,dy' - y'\,dx')$$
$$= \int_0^l (x'\,dy' - y'\,dx') + \lambda^2 \int_0^l (x\,dy - y\,dx).$$

Cela exige que

$$\int_0^l (x\,dy - y\,dx) = \int_0^l (x'\,dy' - y'\,dx'),$$

c'ést-à-dire que les contours de départ (C) et (C′) aient même surface. On peut donc énoncer ce résultat :

A tout ensemble de deux contours fermés ayant même longueur et même surface, on peut faire correspondre une infinité de couples de contours possédant les mêmes propriétés; il suffit d'établir entre les deux contours une correspondance par arcs égaux et de prendre sur la droite joignant deux points homologues M, M′ *deux points* P *et* P′ *tels que*

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{P'M}} = -\lambda,$$

P *et* P′ *décrivent deux contours de même longueur et de même aire.*

Tout couple de contours jouissant des propriétés ci-dessus est d'ailleurs susceptible du mode de génération précédent, d'une infinité de façons.

Signalons que le résultat du n° I est un cas particulier du suivant qu'il serait aisé de vérifier :

Si M *et* M′, *au lieu de décrire deux courbes* (C) *et* (C′) *du plan, se déplacent en restant homologues dans une transformation quelconque par aires constantes du plan, il en est de même de tous les couples* (P, P′), *définis comme au n°* I, *portés par la droite* MM′.

IV. La propriété qui fait l'objet du n° II s'étend à deux courbes de l'espace.

Si M *et* M′ *sont deux points homologues quelconques de deux courbes* (C) *et* (C′) *de l'espace sur lesquelles se trouve établie une correspondance par arcs égaux, les couples de points* P et P′ $\left(\frac{\overline{\text{PM}}}{\overline{\text{PM}'}} = \frac{\overline{\text{P}'\text{M}'}}{\overline{\text{P}'\text{M}}} = -\lambda\right)$, *déterminent sur les courbes* (Γ) *et* (Γ′) *sur lesquelles ils sont distribués, une correspondance par arcs égaux.*

Pour s'en rendre compte, on peut par exemple projeter la figure formée par quatre éléments d'arcs associés (ds_{M}, $ds_{\text{M}'}$, ds_{P}, $ds_{\text{P}'}$) sur le plan parallèle aux quatre tangentes correspondantes, les éléments d'arcs envisagés se projettent suivant des éléments équivalents, et la propriété annoncée résulte du n° II même.

La propriété actuelle peut intervenir dans certaines questions intéressant la géométrie des surfaces.

Voici un exemple qui vient naturellement à l'esprit.

Imaginons que M et M′ décrivent deux surfaces applicables quelconques (S) et (S′), en restant homologues dans l'application.

P et P′ décrivent alors, d'après ce qui précède, deux surfaces (Σ) et (Σ′) telles que deux arcs homologues quelconques soient égaux. (Σ) et (Σ′) sont applicables.

A tout couple de surfaces applicables la construction géométrique indiquée ci-dessus en fait donc correspondre une infinité d'autres.

Si en particulier λ est infiniment voisin de 1, (Σ) et (Σ′) sont infiniment voisins, et l'on voit apparaître, de façon purement géométrique, le lien qui existe entre le problème de la recherche des couples de surfaces applicables et celui de la déformation infiniment petite.