R. OUZILOU

Suites exactes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. n° 3, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A3_0>

f a c u l t é   d e s   s c i e n c e s   d e   l y o n

SEMINAIRE
D'ALGEBRE
1963-1964
2° niveau

3. SUITES EXACTES

par R. Ouzilou

Dans la littérature des catégories, fort abondante ces dix dernières années, surtout en ce qui concerne les catégories abéliennes, des résultats d'une grande portée, mais jugés par trop élémentaires, sont présentés sous forme de catalogue, sans qu'on croit utile de les démontrer. A notre connaissance, le seul effort entrepris pour consolider ces positions acquises, semble être du à l'école américaine d'algèbre homologique, et cette entreprise qui peut paraître sans panache, n'est sans doute pas dépourvue d'esprit de sacrifice.

Nous allons donc, par les propos qui vont suivre, essayer de grossir les rangs de cette arrière-garde dont le travail consiste justement à cultiver le terrain conquis par des pionniers allant toujours de l'avant.

Pour délimiter l'étendue de cet exposé, disons que nous tenterons d'aboutir, par des généralisations successives, à cette propriété bien connue des catégories abéliennes, et qui a servi de nourrice à l'homologie naissante, à savoir le diagramme du serpent. Sur ce chemin, nous trouverons en applications plus modestes de nos préludes, les célèbres théorèmes d'isomorphie de Noether.

Notations : Pour un morphisme $u : A \longrightarrow B$, le diagramme canonique

$$\begin{tikzcd}
 & & A/u\,(0) \arrow[r, "\tilde{u}"] & u(A) \arrow[d, "\mathrm{Im}\ u"] & & \\
0 \arrow[r] & u\ (A) \arrow[r, "\mathrm{Ker}\ u"] & A \arrow[u, "\mathrm{Coim}\ u"] \arrow[r, "u"] & B \arrow[r, "\mathrm{Coker}\ u"] & B/u(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exact en tout objet de la seconde ligne, présente les notations qui seront utilisées par la suite.

D'une façon générale, pour tout sous-objet (X,f) de A et tout sous-objet (Y,g) de B, on désigne par $u(X)$ <u>la source du morphisme</u> $\mathrm{Im}(f.u)$ <u>et par</u> $\overset{-1}{u}(Y)$ <u>la source du morphisme</u> $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(g).u)$.

Les doubles flèches indiqueront des morphismes identiques.

(0,I). <u>Remarque</u> : De la décomposition canonique de u, on déduit, pour tout monomorphisme b de source B, la relation

$$\mathrm{Im}(b.u) = b.\mathrm{Im}(u)$$

1. <u>Noyau d'un morphisme composé</u>.

(1,1) <u>Proposition</u>. Pour toute suite de morphismes $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$,

$$\text{on a : } \mathrm{Im}(u.\mathrm{Ker}(v.u)) = \mathrm{Ker}(v) \wedge \mathrm{Im}(u).$$

<u>Lemme</u>. Si, dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, Leftrightarrow] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & D \arrow[d, Leftrightarrow] \\
A \arrow[r] & C \arrow[r, "c"] \arrow[d] & D \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

la première ligne et la colonne médiane sont exactes , alors la seconde ligne est exacte.

Puisque $c.(b.a) = o$, on a $\mathrm{Coim}(c) \leq \mathrm{Coker}(b.a)$; il reste donc à vérifier l'inégalité réciproque ; or, si f est un épimorphisme de source C tel que $f \leq \mathrm{Coker}(b.a)$, on a $f.(b.a) = o$, d'où b étant un épimorphisme, $f.b \leq \mathrm{Coker}(a) = \mathrm{Coim}(c.b) = \mathrm{Coim}(c).b$ (remarque ci-dessus, par dualité). Mais alors, $f \leq \mathrm{Coim}(c)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Etablissons maintenant la relation (1,1) dans le cas particulier, où u est un monomorphisme, soit :

(1,2) $$u.\mathrm{ker}(v.u) = \mathrm{Ker}(v) \wedge u;$$

$u.\mathrm{Ker}(v.u) \leq u$ étant évidente, et $v.u.\mathrm{Ker}(v,u)$ entrainant $u.\mathrm{Ker}(v.u) \leq \mathrm{Ker}(v)$, il reste à vérifier que $u.\mathrm{Ker}(v.u) \geq \mathrm{Ker}(v) \wedge u$. Soit f un monomorphisme de but B tel que $f \leq \mathrm{Ker}(v)$ et $f \leq u$, il existe alors un monomorphisme g tel que $f = u.g$, et l'on a $v.f = o$, d'où $g \leq \mathrm{Ker}(v.u)$, ce qui donne bien $f \leq u.\mathrm{Ker}(v.u)$ et établit (1,2).

Dans le cas général, considerons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\mathrm{Ker}(v.u)"] \arrow[d, <->] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{u}.\mathrm{Coim}(u)"] & \cdot \arrow[d, <->] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "v.\mathrm{Im}(u)"'] \arrow[d] & \cdot \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

qui satisfait aux conditions du lemme; on a donc

$$\mathrm{Im}(u.\mathrm{Coim}(u).\mathrm{Ker}(v.u)) = \mathrm{Ker}(v.\mathrm{Im}(u))$$

d'où $$\mathrm{Im}(u.\mathrm{Ker}(v.u)) = \mathrm{Im}(u).\mathrm{Ker}(v.\mathrm{Im}(u))$$

et la formule (1,2) donne alors la formule (1,1).

(1,3) __Corollaire.__ Si dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, <->] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & D \arrow[d, <->] \\ A \arrow[r] & C \arrow[r, "c"'] & D \end{tikzcd}$$

la première ligne est exacte, alors $\mathrm{Im}(b.a) = \mathrm{Im}(b) \wedge \mathrm{Ker}(c)$.

Du lemme précédent on déduit en effet, l'exactitude de la suite $(\tilde{b}.\mathrm{Coim}(b).a, c.\mathrm{Im}(b))$ soit $\mathrm{Im}(\tilde{b}.\mathrm{Coim}(b).a) = \mathrm{Ker}(c.\mathrm{Im}(b))$ d'où $\mathrm{Im}(b.a) = \mathrm{Im}(b).\mathrm{Ker}(c.\mathrm{Im}(b)) = \mathrm{Ker}(c) \wedge \mathrm{Im}(b)$ d'après (1,2).

(1,4) __Corollaire.__ Pour un diagramme commutatif et exact

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"'] \\ A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C' \end{tikzcd}$$

on a : $$\mathrm{Im}(b.u) = \mathrm{Im}(u'.a) = \mathrm{Im}(b) \wedge \mathrm{Im}(u')$$

En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, <->] & B \arrow[r, "c.v"] \arrow[d, "b"'] & C' \arrow[d, <->] \\ A \arrow[r, "u'.a"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C' \end{tikzcd}$$

satisfait aux conditions de (1,3).

(1,5) Remarque : il est parfois plus commode d'exprimer ce résultat sous la forme équivalente :

$$\mathrm{Coker}(b.u) = \mathrm{Coker}(u'.a) = \mathrm{Coker}(b) \vee \mathrm{Coker}(u').$$

Ce corollaire admet, sous certaines conditions, une reciproque que nous verrons bientôt.

(1,6) Corollaire. Si l'on peut plonger une suite $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ dans un diagramme commutatif du type :

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
& A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"'] \\
& A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "a'"'] & B' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "b'"] & C' \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r, "u''"] & B''
\end{tikzcd}$$

où les autres lignes et les colonnes sont exactes alors cette suite est exacte.

D'après le corollaire (1,4), $\mathrm{Im}(b.u) = \mathrm{Im}(b) \wedge \mathrm{Im}(u')$, d'où $b.\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(b)\ \mathrm{Ker}(v')$ et, en vertu de (1,1) :

$$b.\mathrm{Im}(u) = b.\mathrm{Ker}(v'.b) = b.\mathrm{Ker}(c.v) \text{ et}$$
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(c.v) = \mathrm{Ker}(v).$$

(1,7) Corollaire. Pour un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\
A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \\
0
\end{tikzcd}$$

on a : $\mathrm{Im}(v.\mathrm{Ker}(b)) = \mathrm{Ker}(c)$.

Il suffit d'appliquer la forme duale de (1,6) au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & 0 \\
{} \arrow[r, "\mathrm{Ker}(b)"] \arrow[d, leftrightarrow] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "v"'] & B' \arrow[d, "v'"] & \\
{} \arrow[r, "v.\mathrm{Ker}(b)"] \arrow[d] & C \arrow[r, "c"] \arrow[d] & C' & \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

En particulier d'un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\
A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "v'"] & C' & \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

on déduit que c est un monomorphisme.

(1,8) <u>Corollaire</u>, ou lemme des "quatre" (présenté par raison de symétrie sous la forme plus faible de lemme des "cinq", cf.[3]).

D'un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_o \arrow[r, "a_o"] \arrow[d, "f_o"'] & A^1 \arrow[d, "f^1"] \\
B_2 \arrow[r, "b_2"'] \arrow[d] & B_1 \arrow[r, "b_1"'] & B_o \arrow[r, "b_o"'] & B^1 \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

on déduit que f_o est un monomorphisme.

D'après (1,7), $f_o.\mathrm{Im}(a_1)$ est un monomorphisme, or $\mathrm{Im}(a_1) = \mathrm{Ker}(a_o) = \mathrm{Ker}(b_o.f_o)$. Mais de $\mathrm{Ker}(f_o) \leqslant \mathrm{Ker}(b_o.f_o)$, on déduit l'existence d'un morphisme u tel que $\mathrm{Ker}(f_o) = \mathrm{Ker}(b_o.f_o).u$, d'où $o = f_o.\mathrm{Ker}(f_o) = f_o.\mathrm{Im}(a_1).u$, ce qui entraine $u = o$, et $\mathrm{Ker}(f_o) = o$.

2. Théorèmes d'isomorphie.

Nous allons tout d'abord établir une réciproque de (1,4).

(2,1) Proposition. Si un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d] & & \\
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & O \\
A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

satisfait à la condition $\mathrm{Im}(b.u) = \mathrm{Im}(u'.a) = \mathrm{Im}(b) \wedge \mathrm{Im}(u')$ (fibration sur B'), alors c est un monomorphisme.

En effet, $\mathrm{Im}(b.u) = b.\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(b) \wedge \mathrm{Ker}(v') = b.\mathrm{Ker}(c.v)$ (1,1) d'où $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(c.v)$, $\mathrm{Coim}(v) = \mathrm{Coim}(c.v)$, $v = \mathrm{Coim}(c).v$ et enfin $\mathrm{Coim}(c) = 1_C$.

(2,2) Corollaire (principe de symétrie). Pour un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
 & & O \arrow[d] & & \\
 & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & O \\
O \arrow[r] & A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "a'"'] & B' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "b'"] & C' & \\
 & A'' \arrow[r, "u''"] \arrow[d] & B'' & & \\
 & O & & &
\end{tikzcd}$$

les conditions Ker(u") = o et Ker(c) = o sont équivalentes.

Ceci résulte immédiatement de (1,4).

(2,3) Remarque : dans le cas particulier d'un épimorphisme a, la proposition (2,1) et le corollaire (1,7) donnent le même résultat.

(2,4) Proposition. (1° théorème d'isomorphie). Pour trois objets A,B,C tels que C soit sous-objet de B, B sous-objet de A, le quotient B/C est alors sous-objet du quotient A/C, et A/B, (A/C)/(B/C) sont naturellement isomorphes.

Considérons le diagramme commutatif canonique :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & C \arrow[d] & C \arrow[l] \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/B \arrow[r] & C \\
 & B/C \arrow[d] & A/C \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme peut être fermé commutativement par un monomorphisme $B/C \longrightarrow A/C$ (2,1).

D'après la forme duale de (1,6), le diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & B \arrow[r] \arrow[d] & B/C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & A/B \arrow[d] & (A/C)/(B/C) \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

peut être fermé par une ligne exact : $0 \longrightarrow A/B \longrightarrow (A/C)/(B/C) \longrightarrow 0$.

(2,5) Proposition (2° théorème d'isomorphie). Pour tout couple (A,B) de sous-objets d'un objet M, les quotients $A/A\wedge B$ et $A\vee B/B$ sont naturellement isomorphes.

Considérons le diagramme canonique :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A\wedge B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A/A\wedge B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & A\vee B \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"] & A\vee B/B \arrow[r] & 0 \\
 & B/A\wedge B \arrow[d] & A\vee B/A \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

d'après (2,1), on peut le fermer commutativement par des monomorphismes $A/A\wedge B \longrightarrow A\vee B/B$ et $B/A\wedge B \longrightarrow A\vee B/A$. Q désignant le quotient de $A\vee B/B$ par $A/A\wedge B$, on peut d'après (1,6), fermer commutativement ce diagramme par une ligne exacte :

$$0 \longrightarrow B/A\wedge B \longrightarrow A\vee B/A \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

ce qui prouve au passage que Q est aussi le quotient de $A\vee B/A$ par $B/A\wedge B$.

D'après la forme duale de (1,4), on a pour l'épimorphisme $f : A\vee B \longrightarrow Q$, ainsi construit : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\alpha')\vee\mathrm{Ker}(\beta') = \alpha\vee\beta = 1_{A\vee B}$, d'où $Q = 0$.

(2,6) <u>Corollaire</u>. Dans une catégorie abélienne, le treillis des sous-objets d'un objet M, et par conséquent le treillis des quotients de M, sont modulaires.

Soient A,B,C trois sous-objets de M tels que $A\leqslant C$, $A\wedge B = C\wedge B$ $(= I)$, $A\vee B = C\vee B$ $(= J)$. Des diagrammes canoniques commutatifs et exacts :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r] & C/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (2,1)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ A \arrow[r] \arrow[d] & A/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ U \arrow[r] & U/B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ C \arrow[r] \arrow[d] & C/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ U \arrow[r] & U/B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & \end{tikzcd} \tag{2,5}$$

et du diagramme global :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & & A/I \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd] & 0 \\ & C \arrow[r] \arrow[dl] & C/I \arrow[dr] & & \\ U \arrow[rrr] & & & U/B & \end{tikzcd}$$

on déduit la commutativité de

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dl] \\ & A/I \arrow[rr] \arrow[dr] & & C/I & \\ & & U/B \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

ce qui fait de $A/I \longrightarrow C/I$ un isomorphisme.

Le lemme des "4" (forme duale) appliqué alors au diagramme

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & \\ I \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ I \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & C/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

montre que l'injection canonique $0 \longrightarrow A \longrightarrow C$ est un isomorphisme d'où $A = C$.

3. <u>Diagramme du serpent</u>.

Tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(a) \arrow[d] & \mathrm{Ker}(b) \arrow[d] & \mathrm{Ker}(c) \arrow[d] \\
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"'] \\
A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "v'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
\mathrm{Coker}(a) & \mathrm{Coker}(b) & \mathrm{Coker}(c)
\end{tikzcd}$$

peut être fermé commutativement par les lignes (u_1,v_1) en haut et (u'_1,v'_1) en bas; de plus, si la suite (u,v) est exacte et si u' est un monomorphisme, la suite (u_1,v_1) est alors exacte ((1,6)) et par dualité, si la suite (u',v') est exacte, et si v est un épimorphisme, la suite (u',v') est exacte.

Nous allons voir de plus, que sous toutes ces conditions, à savoir commutativité et exactitude du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C' &
\end{tikzcd}$$

il existe un morphisme $\delta : \overset{-1}{c}(0) \longrightarrow A'/a(A)$, dit morphisme de connexion, tel que la suite $(u_1,v_1,\delta,u'_1,v'_1)$ soit exacte.

Ce morphisme δ va être construit en trois étapes :

1°) u' étant un monomorphisme, on a : $\mathrm{Coim}(u.b) = \mathrm{Coim}(u'.a) = \mathrm{Coim}(a)$, d'où $\mathrm{Coim}(a) \leq \mathrm{Coim}(u)$; il existe donc, puisque $u(A) = \overset{-1}{v}(0)$, un épimorphisme $\alpha : \overset{-1}{v}(0) \longrightarrow a(A)$, tel que le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & v^{-1}(0) \arrow[r, "\mathrm{Ker}(v)"] \arrow[dl, "\alpha"'] & B \arrow[dd, "b"] \\
a(A) \arrow[d, "\mathrm{Im}(a)"'] & & \\
A' \arrow[rr, "u'"] & & B'
\end{tikzcd}
$$

soit commutatif.

2°) De la relation $\mathrm{Im}(b.\mathrm{Ker}(c.v)) = \mathrm{Im}(b'.\mathrm{Ker}(v'.b))$

$$= \mathrm{Ker}(v') \wedge \mathrm{Im}(b) \qquad (1,1)$$

$$= \mathrm{Im}(u') \wedge \mathrm{Im}(b) \leq \mathrm{Im}(u'),$$

on déduit l'existence d'un morphisme $\beta : \overset{-1}{cv}(0) \longrightarrow A'$, tel que

$$u'.\beta = b.\mathrm{Ker}(c.v).$$

Par ailleurs, $\mathrm{Ker}(v) \leq \mathrm{Ker}(c.v)$ assure l'existence d'un monomorphisme $i : \overset{-1}{v}(0) \longrightarrow \overset{-1}{c.v}(0)$ tel que :

$$\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(c.v).i$$

ce qui permettra de vérifier sans peine la commutativité du diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
\overset{-1}{v}(0) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \overset{-1}{c.v}(0) \arrow[r, "\mathrm{Ker}(c.v)"] \arrow[d] & B \arrow[d, "b"] \\
a(A) \arrow[r, "\mathrm{Im}(a)"'] & A' \arrow[r, "u'"'] & B'
\end{tikzcd}
$$

3°) De $c.v.\mathrm{Ker}(c.v) = o$, on déduit l'existence d'un morphisme $w = \overset{-1}{c.v}(0) \longrightarrow \overset{-1}{c}(0)$ tel que :

$$\mathrm{Ker}(c).w = v.\mathrm{Ker}(c.v).$$

En appliquant alors au diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\overset{-1}{v}(0) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \overset{-1}{c.v}(0) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\mathrm{Ker}(c.v)"] & \overset{-1}{c}(0) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ker}(c)"] & 0 \\
\overset{-1}{v}(0) \arrow[r, "\mathrm{Ker}(v)"] \arrow[d] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\mathrm{Coim}(c.v)"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Coim}(c)"] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] & \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

le corollaire (1,6), on s'assure de l'exactitude de la première ligne de ce diagramme, ce qui entraine l'existence d'un morphisme $\delta : \overset{-1}{c}(0) \longrightarrow A'/a(A)$ tel que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overset{-1}{v}(0) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & c.v(0) \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "\beta"'] & \overset{-1}{c}(0) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & a(A) \arrow[r, "\mathrm{Im}(a)"'] \arrow[d] & A' \arrow[r, "\mathrm{Coker}(a)"'] & A'/a'A) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif et exact.

<u>Noyau de</u> δ : d'après (1,7), $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Im}(w.\mathrm{Ker}(\beta))$
$= \mathrm{Im}(w.\mathrm{Ker}(b.\mathrm{Ker}(c.v)))$,

d'où $\mathrm{Ker}(c).\mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Im}(\mathrm{Ker}(c).w.\mathrm{Ker}(b.\mathrm{Ker}(c.v)))$
$= \mathrm{Im}(v.\mathrm{Ker}(c.v).\mathrm{Ker}(b.\mathrm{Ker}(c.v)))$
$= \mathrm{Im}(v.(\mathrm{Ker}(b) \wedge \mathrm{Ker}(c.v)))$ (1,1)
$= \mathrm{Im}(v.\mathrm{Ker}(b))$
$= \mathrm{Im}(\mathrm{Ker}(c).v_1)$
$= \mathrm{Ker}(c).\mathrm{Im}(v_1)$

d'où $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Im}(v_1)$.

Par dualité, on peut construire des morphismes α', β', i', w', δ' satisfaisant à $\beta'.v = \mathrm{Coker}(u'.a).b$; $w'.\mathrm{Coker}(a) = \mathrm{Coker}(u'.a).u'$, et tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'/a(A) \arrow[r, dashed, "w'"] & B'/u'.a(A) \arrow[r, dashed, "i'"] & B'/u'(A') \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overset{-1}{c}(0) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\delta'"] & C \arrow[r] \arrow[u, "\beta'"] & C/\overset{-1}{c}(0) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\alpha'"] & 0 \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif et exact. D'où $w'.\delta'.w = \beta'.\mathrm{Ker}(c).w = \beta'.v.\mathrm{Ker}(c.v)$ $= \mathrm{Coker}(u'.a).b.\mathrm{Ker}(c.v) = \mathrm{Coker}(u'.a).u'.\beta = w'.\mathrm{Coker}(a).\beta = w'.\delta.w$ ce qui donne, w' étant un monomorphisme et w un épimorphisme, $\delta = \delta'$, et puisqu'on a par dualité $\mathrm{Coker}(\delta') = \mathrm{Coim}(u'_1)$, l'exactitude de la suite $(u_1, v_1, \delta, u'_1, v'_1)$ est assurée.

Bibliographie.

[1]. N.Bourbaki, Algèbre commutative, Chap 1, p.14-22.

[2]. D.A.Buchsbaum, Exact Categories and Duality, Trans. Am. Math. Soc. 80 (1955) p.1-34

[3]. H.Cartan et S.Eilenberg, Homological Algebra, Princeton (1956) p.5, 40.

[4]. Seminaire Grothendieck, Faculté de Paris, 1957-1958

[5]. Séminaite d'Algèbre, Faculté de Lyon, 1961-1962.

-o-o-o-o-