

G. GERMAIN

**Extension algébrique simple d'un anneau Propriétés
de transfert et de descente**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 4
, p. 55-77

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_4_55_0

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXTENSION ALGEBRIQUE SIMPLE D'UN ANNEAU

PROPRIETES DE TRANSFERT ET DE DESCENTE

G. GERMAIN

Introduction.

Dans tout ce qui suit, A désigne un sous-anneau d'un domaine d'intégrité B , ayant même élément unité que B , θ un élément de B n'appartenant pas à A , A^* le plus petit anneau contenant A et θ qu'on appelle extension simple de A selon θ . Nous supposons que θ est algébrique sur A .

Au paragraphe I, on cherche une condition sur A pour qu'il existe un polynôme caractéristique de θ sur A .

Au paragraphe II, on étudie le relèvement des idéaux de A et on donne une condition nécessaire pour que A^* soit local lorsque A est local et factoriel.

Au paragraphe III, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que A^* soit normal lorsque A est factoriel et de rang un.

Au paragraphe IV, on établit deux démonstrations de la propriété de descente suivante : " A^* local régulier et θ fortement entier sur $A \Rightarrow A$ local régulier".

Soient A un sous-anneau d'un domaine d'intégrité B ayant même élément unité que B et θ un élément de B n'appartenant pas à A . Notons A^* , le plus petit anneau contenant A et θ , qu'on appelle extension simple de A selon θ . Rappelons que A^* est l'ensemble des expressions polynômiales $\sum_{i=0}^n a_i \theta^i$, $a_i \in A$, $n \in \mathbb{N}$, et qu'il est isomorphe à $\frac{A[x]}{\mathfrak{J}}$, \mathfrak{J} étant l'idéal des polynômes de $A[x]$ dont θ est racine.

Rappelons aussi la terminologie suivante :

- 1) Si $\mathfrak{J} = (0)$, A^* est une extension transcendante de A
- 2) Si $\mathfrak{J} \neq (0)$ et si aucun polynôme de \mathfrak{J} n'a un coefficient directeur égal à l'unité, θ est dit algébrique sur A et A^* extension algébrique de A .
- 3) Si $\mathfrak{J} \neq (0)$ et si il existe un polynôme de \mathfrak{J} ayant son coefficient directeur égal à l'unité, θ est dit entier sur A et A^* extension entière de A .
- 4) Si $\mathfrak{J} \neq (0)$ et si parmi les polynômes de \mathfrak{J} de plus faible degré, il en existe un dont le coefficient directeur est égal à l'unité, θ est dit fortement entier sur A .

Dans ce paragraphe nous nous placerons dans le cas où $\mathfrak{J} \neq (0)$.

Proposition 1-I : Si A est factoriel, tout idéal premier de $A[x]$ au-dessus de l'idéal (0) de A est principal et de rang 1.

Soit \mathfrak{P} un idéal premier de $A[x]$ tel que $\mathfrak{P} \cap A = (0)$. Il existe dans \mathfrak{P} un polynôme irréductible $\Phi(x)$, non nul, de degré minimum, ce degré étant strictement positif. En effet, l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de \mathfrak{P} étant un sous-ensemble de \mathbb{N} , il possède un élément minimum non nul car $\mathfrak{P} \cap A = (0)$. Soit $\varphi(x)$ un élément de \mathfrak{P} ayant ce degré minimum.

Nous pouvons prendre $\phi(x)$ primitif (le p.g.c.d. de ses coefficients égal à l'unité de A) car \mathfrak{P} est premier et au-dessus de l'idéal (0) de A .

$\phi(x)$ est irréductible, sinon $\phi(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)$ avec $0 < d^\circ(\phi_1(x)) < d^\circ(\phi(x))$ et $0 < d^\circ(\phi_2(x)) < d^\circ(\phi(x))$. \mathfrak{P} étant premier, $\phi_1(x) \in \mathfrak{P}$ ou $\phi_2(x) \in \mathfrak{P}$. C'est impossible car \mathfrak{P} n'a pas d'élément de degré strictement inférieur à celui de $\phi(x)$.

Montrons que $\mathfrak{P} = (\phi(x))$. Soit $p(x) \in \mathfrak{P}$. On peut effectuer la division généralisée de $p(x)$ par $\phi(x)$ (voir [I1] page 133) : il existe un couple unique de polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels que

$$(1) \quad a^k p(x) = \phi(x)q(x) + r(x)$$

avec $k = \max(0, m-n+1)$ et $d^\circ(r(x)) < n$ ou $r = 0$, n (respectivement m) étant le degré de $\phi(x)$ (respectivement $p(x)$) et a le coefficient directeur de $\phi(x)$.

$r(x) = a^k p(x) - \phi(x)q(x)$ appartient à \mathfrak{P} et $d^\circ(r(x)) < d^\circ(\phi(x)) \Rightarrow r(x) = 0$, c'est-à-dire, $a^k p(x) = \phi(x)q(x)$. $\phi(x)$ étant irréductible et $A[x]$ factoriel, $\phi(x)$ divise $p(x)$ c'est-à-dire $p(x) = \phi(x)q_1(x)$. \mathfrak{P} est l'idéal principal $(\phi(x))$.

S'il existe un idéal premier \mathfrak{H} de $A[x]$ strictement contenu dans \mathfrak{P} et différent de l'idéal (0) , d'après ce qui précède, $\mathfrak{H} = (\psi(x))$ où $\psi(x)$ est un polynôme irréductible. $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{P} \Rightarrow \psi(x) = \lambda(x)\phi(x)$, ce qui est impossible. \mathfrak{P} est de rang 1.

Proposition 2-I : Si A est factoriel, l'idéal \mathfrak{J} des polynômes, dont θ est racine, est principal et de rang 1

B étant intègre, \mathfrak{J} est un idéal premier et $\mathfrak{J} \cap A = (0)$. Donc, d'après la proposition, \mathfrak{J} est principal et de rang 1.

Nous venons de montrer que lorsque A est factoriel, il existe un polynôme primitif irréductible $\phi(x)$ tel que $\mathfrak{J} = (\phi(x))$ et $K \cong \frac{A[x]}{(\phi(x))}$. Comme en [1], $\phi(x)$ sera appelé le polynôme caractéristique de \mathcal{O} sur A .

Proposition 3-I : Pour tout idéal premier \mathfrak{P} de A tel que $\frac{A}{\mathfrak{P}}$ soit factoriel,

les idéaux premiers de $A[x]$ au-dessus de \mathfrak{P} sont de la forme

$(\psi(x), \mathfrak{P})$ où $\bar{\psi}(x)$ est un polynôme premier de $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$ (ou bien $\bar{\psi}(x) = \bar{0}$).

Notations : $\psi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $\bar{\psi}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \dots + \bar{a}_nx^n$ \bar{a}_i étant la classe de a_i dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}$.

Soit \mathfrak{P}_x un idéal de $A[x]$ tel que $\mathfrak{P}_x \cap A = \mathfrak{P}$.

$\bar{\mathfrak{P}}_x = \{\bar{p}(x), p(x) \in \mathfrak{P}_x\}$ est un idéal premier de $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$ au-dessus de l'idéal $(\bar{0})$ de $\frac{A}{\mathfrak{P}}$. Il est évident que $\bar{\mathfrak{P}}_x$ est un idéal. Il est premier car si $\bar{p}(x)\bar{q}(x) \in \bar{\mathfrak{P}}_x$, il existe $p_1(x) \in A[x]$ et $q_1(x) \in A[x]$ tels que :

$$\bar{p}_1(x) = \bar{p}(x), \bar{q}_1(x) = \bar{q}(x) \text{ et } p_1(x)q_1(x) \in \mathfrak{P}_x$$

\mathfrak{P}_x étant premier, $p_1(x)$ ou $q_1(x)$ appartient à \mathfrak{P}_x , donc $\bar{p}(x)$ ou $\bar{q}(x)$ appartient à $\bar{\mathfrak{P}}_x$.

Montrons enfin que $\bar{\mathfrak{P}}_x \cap \frac{A}{\mathfrak{P}} = (\bar{0})$. Soit $\bar{p}(x) = \bar{q} \in \bar{\mathfrak{P}}_x \cap \frac{A}{\mathfrak{P}}$. Il existe $p_1(x) \in \mathfrak{P}_x$ et $q_1 \in A$ tels que $\bar{p}_1(x) = \bar{p}(x)$ et $\bar{q}_1 = \bar{q}$ et $p_1(x) = q_1 + \sum_{i=1}^k p_i x^i$ ($p_i \in \mathfrak{P}$).
 $q_1 = p_1(x) - \sum_{i=1}^k p_i x^i \Rightarrow q_1 \in \mathfrak{P}_x \cap A = \mathfrak{P} \Rightarrow \bar{q}_1 = \bar{q} = \bar{0}$.

D'après la proposition 1.I, $\bar{\mathfrak{P}}_x = (\bar{\psi}(x))$, $\bar{\psi}(x)$ étant un polynôme premier de $\frac{A}{\mathfrak{P}}(x)$. Donc $\mathfrak{P}_x = \{p, \psi(x)\}$.

Corollaire : Si \mathfrak{M} est un idéal maximal de A , les idéaux premiers de $A[x]$ au-dessus de \mathfrak{M} sont les idéaux engendrés par $\{\psi(x), \mathfrak{M}\}$ où $\bar{\psi}(x)$ est un polynôme premier de $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ (ou bien $\bar{\psi}(x) = \bar{0}$).

Remarques :

1°) K étant un corps, $K[x]$ n'est jamais un anneau local. En effet, si $K \neq \{0\}$ il a au moins deux éléments 0 et 1. Alors les polynômes x et $1+x$ sont premiers entre eux (identité de Bezout) et sont premiers. Donc les idéaux (x) et $(1+x)$ sont premiers et maximaux. $K[x]$ a au moins deux idéaux maximaux.

2°) L'idéal $\mathfrak{M}A[x]$ engendré par l'idéal maximal \mathfrak{M} de A est premier, mais n'est jamais maximal dans $A[x]$, car d'après 1°), il existe toujours dans $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ un polynôme premier non nul $\bar{\phi}(x)$ et l'idéal $\{\phi(x), \mathfrak{M}\}$ est premier, au-dessus de \mathfrak{M} et contient strictement $\mathfrak{M}A[x]$.

3°) Les anneaux $\frac{A[x]}{\mathfrak{M}A[x]}$ et $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ sont isomorphes, \mathfrak{M} étant l'idéal maximal de A ; (Rappelons que pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ et $\frac{A[x]}{\mathfrak{p}A[x]}$ sont isomorphes). $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ étant un corps, $\frac{A}{\mathfrak{M}}[x]$ est euclidien donc factoriel.

Nous avons donc un exemple d'anneau factoriel qui est le quotient d'un anneau par un idéal premier non maximal d'après 2°).

4°) Rappelons le théorème suivant ([III], tome II, page 303) :

*Si A est local régulier et si \mathfrak{p} est un idéal premier engendré par des éléments linéairement indépendants modulo \mathfrak{M}^2 (\mathfrak{M} étant l'idéal maximal de A), alors $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ est local régulier (donc factoriel).
Nous avons un deuxième exemple d'anneau quotient $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ factoriel.*

Ces deux exemples m'ont incité à me poser la question suivante :

A étant un domaine d'intégrité factoriel et \mathfrak{p} un idéal premier de A , à quelles conditions l'anneau quotient $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ est-il factoriel ?

II. Dans ce paragraphe on suppose θ algébrique sur A et A factoriel. Il existe alors un polynôme irréductible $\phi(x)$ de degré n , appelé polynôme caractéristique de θ sur A et tel que A^* soit isomorphe à $\frac{A[x]}{(\phi(x))}$. Nous étudions le relèvement de certains idéaux de A .

Proposition 1-II : L'ensemble des idéaux premiers de A^* , au-dessus de l'idéal premier \mathfrak{p} de A , est isomorphe, pour la relation d'ordre, à l'ensemble des idéaux premiers de $\frac{A[x]}{\mathfrak{p}[x]}$, au-dessus de l'idéal $(\bar{0})$ de $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ et contenant $\bar{\phi}(x)$.

Notations : $\bar{p}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \dots + \bar{a}_n x^n$ étant un élément de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ nous noterons $p(\theta)$ l'un des éléments de A^* de la forme $a_0 + a_1 \theta + \dots + a_n \theta^n$ (où a_i est un représentant de la classe \bar{a}_i), les autres éléments de cette forme étant donnés par $p(\theta) + \sum_{i=1}^r p_i \theta^i$ où $p_i \in \mathfrak{p}$. De même $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ (où a_i est un représentant de la classe \bar{a}_i) est un représentant de la classe $\bar{p}(x)$, les autres étant de la forme $p(x) + \sum_{i=1}^r p_i x^i$ où $p_i \in \mathfrak{p}$.

L'ensemble des idéaux premiers de A^* au-dessus de l'idéal premier \mathfrak{p} de A sera noté \mathfrak{p}^* et l'ensemble des idéaux premiers de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ au-dessus de l'idéal $(\bar{0})$ et contenant $\bar{\phi}(x)$ sera noté $\bar{\mathfrak{J}}$.

Démonstration : Soit $\mathfrak{p}^* \in \mathfrak{p}^*$, montrons que $\bar{\mathfrak{p}}^* = \{\bar{p}(x) \in \frac{A}{\mathfrak{p}}[x], p(\theta) \in \mathfrak{p}^*\}$ est un idéal de $\bar{\mathfrak{J}}$. En effet :

a) $\bar{\mathfrak{p}}^*$ est un idéal de $\frac{A}{\mathfrak{p}}[x]$ (démonstration laissée aux soins du lecteur).

b) $\bar{\mathfrak{p}}^*$ est premier : $\bar{p}(x)\bar{q}(x) \in \bar{\mathfrak{p}}^* \Rightarrow p(\theta)q(\theta) \in \mathfrak{p}^* \Rightarrow p(\theta)$ ou $q(\theta)$

appartient à $\mathfrak{p}^* \Rightarrow \bar{p}(x) \in \bar{\mathfrak{p}}^*$ ou $\bar{q}(x) \in \bar{\mathfrak{p}}^*$

c) $\bar{\mathfrak{p}}^* \cap \frac{A}{\mathfrak{p}} = (\bar{0})$: Soit $\bar{p}(x) = \bar{q} \in \bar{\mathfrak{p}}^* \cap \frac{A}{\mathfrak{p}}$. $p(\theta) = q \in \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$ et $\bar{q} = \bar{p}(x) = \bar{0}$

d) $\bar{\phi}(x) \in \bar{\mathfrak{p}}^*$ car $\phi(\theta) = 0 \in \mathfrak{p}^*$

L'application f : $\mathfrak{p}^* \longrightarrow \bar{\mathfrak{J}}$

$\mathfrak{p}^* \longmapsto \bar{\mathfrak{p}}^* = f(\mathfrak{p}^*)$

est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

f est surjective. Soit $\overline{\mathfrak{P}} \in \overline{\mathfrak{J}}$. Montrons que $\mathfrak{P}^* = \{p(\theta) \in A^*, \overline{p}(x) \in \overline{\mathfrak{P}}^*\}$ est un élément de \mathfrak{J}_f^* tel que $f(\mathfrak{P}^*) = \overline{\mathfrak{P}}^*$

$$\left. \begin{aligned} \overline{p}(x) \in f(\mathfrak{P}^*) &\Rightarrow p(\theta) \in \mathfrak{P}^* \Rightarrow \overline{p}(x) \in \overline{\mathfrak{P}}^* \Rightarrow f(\mathfrak{P}^*) \subset \overline{\mathfrak{P}}^* \\ \overline{p}(x) \in \overline{\mathfrak{P}}^* &\Rightarrow p(\theta) \in \mathfrak{P}^* \Rightarrow \overline{p}(x) \in f(\mathfrak{P}^*) \Rightarrow \overline{\mathfrak{P}}^* \subset f(\mathfrak{P}^*) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\mathfrak{P}^*) = \overline{\mathfrak{P}}^*$$

Il est évident que \mathfrak{P}^* est un idéal car $\overline{\mathfrak{P}}^*$ en est un.

\mathfrak{P}^* est premier : $p(\theta)q(\theta) \in \mathfrak{P}^* \Rightarrow \overline{p}(x)\overline{q}(x) \in \overline{\mathfrak{P}}^* \Rightarrow \overline{p}(x)$ ou $\overline{q}(x)$ appartient à $\overline{\mathfrak{P}}^* \Rightarrow p(\theta)$ ou $q(\theta)$ appartient à \mathfrak{P}^* .

$$\mathfrak{P}^* \cap A = \mathfrak{P} : p(\theta) = q \in \mathfrak{P}^* \cap A \Rightarrow \overline{p}(x) = \overline{q} \in \overline{\mathfrak{P}}^* \cap \frac{A}{\mathfrak{P}} = (\overline{0}) \Rightarrow \overline{p}(x) = \overline{q} = (\overline{0}) \Rightarrow$$

$$p(\theta) = q \in \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{P}^* \cap A \subset \mathfrak{P}. \text{ De plus, } p \in \mathfrak{P} \Rightarrow \overline{p} = \overline{0} \in \overline{\mathfrak{P}}^* \Rightarrow \mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}^*$$

D'où $\mathfrak{P}^* \cap A = \mathfrak{P}$.

f est croissante : Supposons $\mathfrak{P}^* \subset \mathfrak{H}^*$ et soit $\overline{p}(x) \in \overline{\mathfrak{P}}^*$.

$$\text{Alors } p(\theta) \in \mathfrak{P}^* \Rightarrow p(\theta) \in \mathfrak{H}^* \Rightarrow \overline{p}(x) \in \overline{\mathfrak{H}}^* \Rightarrow \overline{\mathfrak{P}}^* \subset \overline{\mathfrak{H}}^*$$

f^{-1} est croissante : $\overline{\mathfrak{P}}^* \subset \overline{\mathfrak{H}}^* \Rightarrow \forall p(\theta) \in f^{-1}(\overline{\mathfrak{P}}^*), \overline{p}(x) \in \overline{\mathfrak{H}}^*$, donc

$$p(\theta) \in f^{-1}(\overline{\mathfrak{H}}^*) \text{ et } f^{-1}(\overline{\mathfrak{P}}^*) \subset f^{-1}(\overline{\mathfrak{H}}^*).$$

Proposition 2 II : Si \mathfrak{P} est un idéal premier de A tel que $\frac{A}{\mathfrak{P}}$ soit factoriel,

les idéaux premiers de A^* au-dessus de \mathfrak{P} sont les idéaux engendrés

respectivement par $\phi_{\mathfrak{P},i}(\theta)$ et \mathfrak{P} pour $i = 1, 2, \dots, n_{\mathfrak{P}}$, $\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{P}}} \overline{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)$

étant la décomposition en facteurs premiers dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$ de $\overline{\phi}(x)$

Démonstration : soit $\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{P}}} \phi_{\mathfrak{P},i}(x)$ la décomposition en facteurs premiers dans

$$\frac{A}{\mathfrak{P}}[x] \text{ de } \overline{\phi}(x). \text{ Montrons que } \overline{\mathfrak{J}} = \left\{ \overline{\mathfrak{P}}_i^*, \overline{\mathfrak{P}}_i^* = (\overline{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)) \right\}_{i=1, \dots, n_{\mathfrak{P}}}$$

$(\overline{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x))$ est un idéal premier au-dessus de $(\overline{0})$ et contenant $\overline{\phi}(x)$, donc

$$\overline{\mathfrak{P}}_i^* = (\overline{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)) \in \overline{\mathfrak{J}} \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n_{\mathfrak{P}}. \text{ Réciproquement soit } \overline{\mathfrak{P}}^* \in \overline{\mathfrak{J}}.$$

$\overline{\mathfrak{P}}^*$ est principal (proposition 1 I). $\overline{\mathfrak{P}}^*$ contenant $(\overline{\phi}(x))$, il existe

$i \in \{1, 2, \dots, n_{\mathfrak{P}}\}$ tel que $(\overline{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)) = \overline{\mathfrak{P}}^*$. D'après la proposition 1-II, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}^*$

est isomorphe à $\overline{\mathfrak{J}}$. Pour tout $\mathfrak{P}^* \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}^*$, il existe $i \in \{1, 2, \dots, n_{\mathfrak{P}}\}$ tel

$$\text{que } \mathfrak{P}^* = f^{-1}(\overline{\mathfrak{P}}_i^*) = f^{-1}((\overline{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x))) = \{p(\theta) \in A^*, \overline{p}(x) = \overline{\lambda}(x)\overline{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)\}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^* &= \left\{ p(\theta) = \lambda(\theta) \phi_{\mathfrak{P},1}(\theta) + \sum p_i \theta^i, \lambda(\theta) \in A^* \text{ et } p_i \in \mathfrak{P} \right\} \\ &= \left\{ \phi_{\mathfrak{P},1}(\theta), \mathfrak{P} \right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}^* = \left\{ \mathfrak{P}_i^*, \mathfrak{P}_i^* = \left\{ \phi_{\mathfrak{P},i}(\theta), \mathfrak{P} \right\} \right\}_{i=1,2,\dots,n_{\mathfrak{P}}}$$

Remarques : (a) Si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$, alors $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}^* = \left\{ \mathfrak{P}^*, \mathfrak{P}^* = \left\{ q(\theta), \mathfrak{P} \right\} \right\}$ où $\bar{q}(x)$ est un polynôme premier quelconque de $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$. En particulier $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P} A^* \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}^*$.

(b) Si $\bar{\phi}(x) = \bar{1}$ c'est-à-dire $\phi(x) = 1 + \sum p_i x^i$, $\bar{\mathfrak{J}} = \emptyset$ d'où $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}^* = \emptyset$.

Il n'y a aucun idéal premier de A^* au-dessus de l'idéal premier \mathfrak{P} de A . On dit alors que \mathfrak{P} est perdu dans A^* (III).

(c) Si $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$, il n'y a aucune relation d'inclusion entre les éléments de $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}^*$ lorsque $\frac{A}{\mathfrak{P}}$ est factoriel. Sinon

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_i^* = \left\{ \phi_{\mathfrak{P},i}(\theta), \mathfrak{P} \right\} \subseteq \mathfrak{P}_j^* = \left\{ \phi_{\mathfrak{P},j}(\theta), \mathfrak{P} \right\} &\Rightarrow \phi_{\mathfrak{P},i}(\theta) = \lambda(\theta) \phi_{\mathfrak{P},j}(\theta) \\ + \sum_{l=1}^l p_l \theta^l (p_l \in \mathfrak{P}) &\Rightarrow \bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x) = \bar{\lambda}(x) \bar{\phi}_{\mathfrak{P},j}(x) \text{ ce qui est impossible} \end{aligned}$$

car $\bar{\phi}_{\mathfrak{P},i}(x)$ est premier dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$. C'est faux si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ car alors

$$\mathfrak{P}^* = \left\{ q(\theta), \mathfrak{P} \right\} \supset \mathfrak{P} A^* \text{ et ce sont deux idéaux de } \mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}^* \text{ d'après (a).}$$

Corollaire : Les idéaux premiers de A^* , au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}$ de A et contenant strictement $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}} A^*$, sont maximaux.

$$\text{Si } \bar{\phi}(x) = \bar{1} \text{ dans } \frac{A}{\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}}[x], \text{ c'est-à-dire, } \phi(x) = 1 + \sum_{i=1}^n m_i x^i \quad m_i \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}$$

il n'y a pas d'idéaux premiers de A^* au-dessus de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}$ (Remarque (b) ci-dessus).

Si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathcal{M}_6} [x]$, c'est-à-dire, $\phi(x) = \sum_{i=0}^n m_i x^i$ $m_i \in \mathcal{M}_6$,

$\mathcal{M}_6^* = \{p(\theta), \mathcal{M}_6\}$, $\bar{p}(x)$ étant un polynôme premier quelconque de $\frac{A}{\mathcal{M}_6} [x]$ ou $\bar{p}(x) = \bar{0}$ (remarque (a)). Soit $\mathcal{H}^* = \{p(\theta), \mathcal{M}_6\}$ un élément de \mathcal{J}_m^* distinct de $\mathcal{M}_6 A^*$ c'est-à-dire tel que $\bar{p}(x) \neq \bar{0}$. Si \mathcal{H}^* n'est pas maximal, il existe un idéal maximal \mathcal{H}^* de A^* contenant \mathcal{H}^* . $\mathcal{H}^* \cap A \supset \mathcal{H}^* \cap A = \mathcal{M}_6$. Donc $\mathcal{H}^* \cap A = \mathcal{M}_6$, car \mathcal{M}_6 est maximal, et \mathcal{H}^* appartient à $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_6}^*$. Il existe $q(\theta)$ tel que $\bar{q}(x) \neq \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathcal{M}_6} [x]$ et $\mathcal{H}^* = \{q(\theta), \mathcal{M}_6\}$. $\mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}^* \implies p(\theta) = \lambda(\theta)q(\theta) + \sum m_i \theta^i$ ($m_i \in \mathcal{M}_6 \implies \bar{p}(x) = \bar{\lambda}(x)\bar{q}(x)$). Ceci est impossible car $\bar{p}(x)$ est premier dans $\frac{A}{\mathcal{M}_6} [x]$. Donc \mathcal{H}^* est maximal.

Si $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$ et $\bar{\phi}(x) \neq \bar{1}$, soit $\bar{\phi}(x) = \prod_{i=1}^{n_{\mathcal{M}_6}} \bar{\phi}_{\mathcal{M}_6, i}(x)$ la décomposition en facteurs premiers de $\bar{\phi}(x)$ dans $\frac{A}{\mathcal{M}_6} [x]$. On a $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_6}^* = \{\mathcal{M}_6^*, \mathcal{M}_6^* = \{\phi_{\mathcal{M}_6, i}(\theta), \mathcal{M}_6\} \mid i=1, 2, \dots, n_{\mathcal{M}_6}\}$ d'après la proposition 2 II et il n'y a aucune relation d'inclusion entre les éléments de $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_6}^*$ (Remarque (c)). Un raisonnement analogue au précédent montre que les idéaux de $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_6}^*$ sont maximaux.

Proposition 3 II : Si \mathcal{H} et \mathcal{H} sont deux idéaux premiers de A^* tels que $\frac{A}{\mathcal{H}}$ et $\frac{A}{\mathcal{H}}$ soient factoriels et $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, alors à tout idéal \mathcal{H}^* de A^* premier et au-dessus de \mathcal{H} , on peut faire correspondre au moins un idéal premier \mathcal{H}^* de A^* au-dessus de \mathcal{H} , tel que $\mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}^*$

Soient $\prod_{j=1}^{n_{\mathcal{H}}} \phi_{\mathcal{H}, j}(x)$ et $\prod_{i=1}^{n_{\mathcal{H}}} \bar{\phi}_{\mathcal{H}, i}(x)$ les décompositions de $\bar{\phi}(x)$ respectivement dans $\frac{A}{\mathcal{H}} [x]$ et dans $\frac{A}{\mathcal{H}} [x]$, et \mathcal{H}^* un idéal premier de A^* au-dessus de \mathcal{H} .

$\mathcal{H}^* = \{r(\theta), \mathcal{H}\}$ avec $r(\theta) = \bar{\phi}_{\mathcal{H}, j}(\theta)$ si $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathcal{H}} [x]$ ou $\bar{r}(x)$ polynôme premier quelconque de $\frac{A}{\mathcal{H}} [x]$ si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathcal{H}} [x]$ (proposition 2 III et remarques). On a $\phi(x) = \prod_{j=1}^{n_{\mathcal{H}}} \phi_{\mathcal{H}, j}(x) + \sum q_i x^i = \prod_{i=1}^{n_{\mathcal{H}}} \phi_{\mathcal{H}, i}(x) + \sum p_i x^i$ soit $\prod_{i=1}^{n_{\mathcal{H}}} \phi_{\mathcal{H}, i}(x) = \prod_{j=1}^{n_{\mathcal{H}}} \phi_{\mathcal{H}, j}(x) + \sum q'_i x^i$ avec $q'_i = q_i - p_i \in \mathcal{H}$ car $p_i \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ et $q_i \in \mathcal{H}$. En remplaçant x par θ ,

nous obtenons l'égalité :

$$\prod_{i=1}^{n_{\mathcal{H}}} \phi_{\mathcal{H}, i}(\theta) = \prod_{j=1}^{n_{\mathcal{H}}} \phi_{\mathcal{H}, j}(\theta) + \sum q'_i \theta^i$$

Nous pouvons en déduire que $\prod_{i=1}^{n_{\mathfrak{P}}} \phi_{\mathfrak{P},i}(\Theta) \in \{\phi_{\mathfrak{H},j}(\Theta), \mathfrak{H}\} = \mathfrak{H}^*$.

Il existe $i \in \{1, 2, \dots, n_{\mathfrak{P}}\}$ tel que $\phi_{\mathfrak{P},i}(\Theta) \in \mathfrak{H}^*$. D'où $\mathfrak{H}^* = \{\phi_{\mathfrak{P},i}(\Theta), \mathfrak{P}\}$ est contenu dans $\mathfrak{H}^* = \{\phi_{\mathfrak{H},j}(\Theta), \mathfrak{H}\}$, \mathfrak{H}^* étant un idéal premier de A^* au-dessus de \mathfrak{P} (proposition 2 II).

Si $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$, $\mathfrak{H}A^*$ est premier et si $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$, $\phi_{\mathfrak{P},i}(\Theta) \in \mathfrak{H}A^*$ et $\mathfrak{H}_i^* = \{\phi_{\mathfrak{P},i}(\Theta), \mathfrak{P}\} \subset \mathfrak{H}A^* \subseteq \mathfrak{H}^*$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n_{\mathfrak{P}}\}$ et tout $\mathfrak{H}^* \in \mathcal{J}_{\mathfrak{H}}^*$.

Si de plus $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$, $\mathfrak{P}A^*$ est premier et $\mathfrak{P}A^* \subset \mathfrak{H}A^* \subseteq \mathfrak{H}^* \forall \mathfrak{H}^* \in \mathcal{J}_{\mathfrak{H}}^*$.
Remarquons que $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{P}}[x]$ entraîne $\bar{\phi}(x) = \bar{0}$ dans $\frac{A}{\mathfrak{H}}[x]$ puisque $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{H}$.

Corollaire : Si A est local régulier et si $\phi(x)$ n'est pas égal à $1 + \sum_{i=1}^n m_i x^i$ où à $\sum_{i=0}^n m_i x^i$ $m_i \in \mathcal{M}$ $\dim A^* = \dim A$.

Rappelons que la dimension d'un anneau A notée $\dim A$, est un entier n tel qu'il existe une chaîne strictement croissante de $n+1$ idéaux premiers de A

$$\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{P}_{n+1}$$

et qu'il n'existe pas de telle chaîne ayant plus de $n+1$ éléments.

Soient \mathcal{M} l'idéal maximal de A et $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base de \mathcal{M} .

$\dim A = n$ car A est local régulier et la chaîne

$$\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_{n-1} \subset \mathcal{M} = \mathfrak{P}_n$$

avec $\mathfrak{P}_i = \{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ $i=1, 2, \dots, n-1$ est une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A [IV]. $\frac{A}{\mathfrak{P}_i}$ étant factoriel pour tout $i=1, 2, \dots, n-1$ [III] on peut trouver une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A^* .

$$\mathfrak{H}_1^* \subset \mathfrak{H}_2^* \subset \dots \subset \mathfrak{H}_{n-1}^* \subset \mathcal{M} = \mathfrak{H}_n^*$$

avec $\mathfrak{H}_i^* = \{\phi_{\mathfrak{P}_i, j_i}(\Theta), \mathfrak{P}_i\}$ (proposition 3-II et $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$, $\bar{\phi}(x) \neq \bar{1}$ dans

$\frac{A}{\mathfrak{P}_i}[x]$ pour $i=1, 2, \dots, n$). Donc $\dim A^* \geq \dim A$. Montrons que $\dim A^* \leq \dim A$.

Soient \mathfrak{p}^* et \mathfrak{q}^* deux idéaux premiers de A^* tels que :

$$\mathfrak{p}^* \supset \mathfrak{q}^*, \quad \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{q}^* \cap A = \mathfrak{q}. \text{ Montrons que } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}.$$

Supposons que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ et posons $S = A - \mathfrak{p}$. D'après [V] (ch. II, § 2 n° 5 proposition 11 et ch. V, § 2, n° 1 lemme 1), il existe un isomorphisme, pour la relation d'inclusion, entre l'ensemble des idéaux premiers de A^* au-dessus de \mathfrak{p} et l'ensemble des idéaux premiers de A_S^* au-dessus de $\mathfrak{p} A_S = \mathfrak{p}_S$ idéal de A_S . Si \mathfrak{p}_S^* et \mathfrak{q}_S^* sont les images respectives par cet isomorphisme de \mathfrak{p}^* et \mathfrak{q}^* alors $\mathfrak{p}_S^* \supset \mathfrak{q}_S^*$ et $\mathfrak{p}_S^* \cap A_S^* = \mathfrak{q}_S^* \cap A_S^* = \mathfrak{p}_S$. Or $A_S^* = \frac{A_S[x]}{(\phi(x))}$

et \mathfrak{p} étant premier et A local régulier, A_S est local régulier [VI]. De plus $\phi(x) \neq 0$ dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S} [x]$. $\mathfrak{p}_S^* \supset \mathfrak{q}_S^*$ est impossible (remarque (c)) et l'hypothèse $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ est absurde. $\sqrt{\text{Cela suffit pour conclure que } \dim A^* \leq \dim A.}$

Proposition 4 II : Si A est local, factoriel et $\dim A > 2$, une condition nécessaire pour que les idéaux maximaux de A^* soient au-dessus de l'idéal maximal \mathfrak{m}_0 de A est que le coefficient directeur du polynôme caractéristique $\phi(x)$ de θ sur A soit inversible ;

Démonstration : une condition nécessaire et suffisante pour que les idéaux maximaux de A^* soient au-dessus de l'idéal maximal \mathfrak{m}_0 de A est que l'idéal $\mathfrak{m} A^*$ engendré par l'idéal maximal \mathfrak{m} de A dans A^* soit contenu dans le radical de A^* .

Il est donc nécessaire et suffisant que les éléments de A^* de la forme

$$1 + \sum_{i=1}^r m_i \theta^i \quad \text{où } m_i \in \mathfrak{m}, \quad r \in \mathbb{N} \text{ soient inversibles. En particulier il est}$$

nécessaire que $1 + m \theta$ soit inversible pour tout $m \in \mathfrak{m}$. $1 + m \theta$ est inversible si il existe $\mu(\theta) \in A^*$ tel que $(1 + m \theta) \mu(\theta) = 1$, soit dans $A[x]$,

$$(1 + mx) \mu(x) = 1 + \lambda(x) \phi(x), \text{ égalité qui s'écrit :}$$

$$(1) \quad \lambda(x) \phi(x) - \mu(x)(1+mx) = 1$$

L'égalité (1) signifie que l'idéal engendré par $\phi(x)$ et $(1+mx)$ dans $A[x]$ est l'anneau tout entier. Nous allons montrer que ceci n'est possible que si le coefficient directeur de $\phi(x)$ est inversible dans A . Appelons $\mathfrak{p}[x]$ l'idéal de $A[x]$ engendré par $\phi(x)$ et $1+mx$. Soit $a \in A$ le reste de la division généralisée de $\phi(x)$ par $1+mx$. On a :

$$(1') \quad m^n \phi(x) = q(x)(1+mx) + a \quad (n = d^\circ(\phi(x)))$$

montrons que $\mathfrak{p}[x] \cap A = aA$. De façon évidente $aA \subset \mathfrak{p}(x) \cap A$.

Soit $q \in \mathfrak{p}[x] \cap A$. $q = \lambda(x) \phi(x) + \mu(x)(1+mx)$ ou encore

$$(2) \quad \lambda(x) \phi(x) = -\mu(x)(1+mx) + q$$

Effectuons la division généralisée de $\lambda(x) \phi(x)$ par $1+mx$

$$(3) \quad m^{n+p} \lambda(x) \phi(x) = \mu_1(x)(1+mx) + q_1 a$$

avec $d^\circ \lambda(x) = p$, q_1 reste de la division généralisée de $\lambda(x)$ par $1+mx$,

multiplions (2) par m^{n+p} ,

$$(2') \quad m^{n+p} \lambda(x) \phi(x) = -m^{n+p} \mu(x)(1+mx) + qm^{n+p}.$$

L'unicité du couple quotient-reste entraîne

$$q_1 a = qm^{n+p}$$

a et m^{n+p} étant premiers entre eux d'après (1'), a divise q car A est factoriel.

Donc $q = \lambda a \in aA$ et $\mathfrak{p}(x) \cap A = aA$.

Si $\phi(x)$ est le polynôme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, et si $a_n \notin \mathfrak{m}_n$

(lorsque $\dim A \geq 2$ on peut toujours choisir m tel que a_n ne soit pas multiple de m),

$a = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} m + \dots - a_1 m^{n-1} + a_0 m^n$. Pour que a soit inversible il faut et il suffit que a_n soit inversible

Si A est local factoriel et de dimension 1, les idéaux maximaux de A^* sont nécessairement au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A = (m)$ de A car un idéal premier de A^* est, ou bien nul, ou bien au-dessus de \mathfrak{m}_A . La proposition 2-II et son corollaire entraînant que, dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que A^* soit local est la même qu'en [I] (chapitre I. § 1 n°2).

III - A^* normal, A étant factoriel et de rang 1.

Rappelons que A^* est extension algébrique simple de A et soit

$\phi(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ le polynôme caractéristique de θ sur A , son coefficient directeur a_n étant un élément non inversible de A dont la décomposition en un produit de facteurs irréductibles est :

$$a_n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

(à un facteur inversible et multiplicatif près).

Nous utiliserons la caractérisation suivante des anneaux normaux :

Un anneau noëthérien A sans diviseurs de zéro est intégralement clos si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

(H₁) Pour chaque idéal premier \mathfrak{P} de A de rang 1, $A_{\mathfrak{P}}$ est intégralement clos.

(H₂) Chaque idéal principal de A n'a pas d'idéaux premiers essentiels immergés.

A étant factoriel et de rang 1, il est à idéaux tous principaux et il est normal. Montrons que A^* est, ou bien un corps, ou bien de rang 1. (on peut dire aussi de dimension 1, voir paragraphe II, page 10). Soit \mathfrak{P}^* un idéal premier de A^* : ou bien $\mathfrak{P}^* \cap A = (0)$ et alors $\mathfrak{P}^* = (0)$ (voir paragraphe II, proposition 2-II). ou bien $\mathfrak{P}^* \cap A \neq (0)$. A étant à idéaux tous principaux $\mathfrak{P}^* \cap A = (q)$. $\phi(x)$ étant primitif, $\bar{\phi}(x) \neq \bar{0}$ dans $\frac{A}{(q)}[x]$ et d'après le corollaire de la proposition 2-II, \mathfrak{P}^* est maximal. La condition (H₂) est donc toujours réalisée dans A^* .

Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante portant sur $\phi(x)$, pour que la condition (H₁) soit réalisée dans A^* , c'est-à-dire pour que A^* soit normal.

Proposition 1 III : A étant factoriel et de rang 1, A^* est normal si et

seulement si A_S^* est normal pour toute partie multiplicative $S = A - \mathfrak{P}$

où \mathfrak{P} est un idéal premier de A .

La condition nécessaire est évidente car : A^* normal $\Rightarrow (A^*)_S$ normal pour toute partie multiplicative de A^* et en particulier pour $S = A - \mathfrak{P}$ où \mathfrak{P} est un idéal premier de A . Rappelons que, S étant une partie multiplicative de A^* contenue dans A on a $(A^*)_S = (A_S)^*$. C'est cet anneau que nous noterons A_S^* .

Supposons que pour tout $S = A - \mathfrak{P}$, où \mathfrak{P} est un idéal premier de A , A_S^* soit normal. Alors pour tout idéal premier \mathfrak{P}^* de A^* , $(A^*)_{S^*} = (A_S^*)_{S^*}$ (où $S^* = A^* - \mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* \cap A$ et $S = A - \mathfrak{P}$) est normal comme A_S^* . Donc A^* est normal d'après (H_1) .

RECHERCHE D'UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE A_S^* SOIT NORMAL.

Rappelons que lorsque le coefficient directeur du polynôme caractéristique appartient à S , la condition nécessaire et suffisante pour que A_S^* soit normal a été trouvée par G. MAURY en [I].

Supposons donc que $a_n \notin S$, $a_n \in \mathfrak{P} = (p)$. Il existe $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ tel que $p_i = p$. Le polynôme caractéristique de θ sur A_S est $\phi(x)$, A_S est local régulier de dimension 1 et d'idéal maximal pA_S . Si $\phi(x) = 1 + pxq(x)$, nous avons vu (paragraphe II, remarque (b)) qu'il n'y a pas d'idéaux de A_S^* au-dessus de pA_S , donc A_S^* est un corps.

Soit $\prod_{i=1}^q \bar{\phi}_i^{\alpha_i}(x)$ la décomposition de $\bar{\phi}(x)$ en facteurs premiers dans

$\frac{A_S}{pA_S}[x]$. A_S^* est semi-local d'idéaux maximaux \mathfrak{p}_i^* ($i = 1, 2, \dots, q$) engendrés respectivement par $\bar{\phi}_i(\theta)$ et pA_S .

Si $\bar{\phi}(x)$ est irréductible dans $\frac{A_S}{pA_S}[x]$, A_S^* est local régulier de dimension 1, donc intégralement clos, car $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}_1(x) \Rightarrow \phi(x) = \phi_1(x) + pq(x)$ et $\phi_1(\theta) = -pq(\theta)$. L'idéal maximal de A_S^* est engendré par p .

Si $\bar{\phi}(x) = \prod_{i=1}^q \bar{\phi}_i^{\alpha_i}(x)$ avec $q > 1$, à quelles conditions A_S^* est-il intégralement clos ?

Soit $\bar{\phi}_1(x)$ un facteur d'exposant $\alpha_1 = 1$ dans la décomposition précédente de $\bar{\phi}(x)$. Il existe un polynôme $\mu(x) \in A_S[x]$ de degré n , tel que l'on puisse écrire

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^q \phi_i^{\alpha_i}(x) + p \mu(x)$$

A_S^* est normal si et seulement si $(A_S^*)_{S_i}$ est normal pour tout $i = 1, 2, \dots, q$ avec $S_i^* = A_S^* - \mathfrak{H}_i^*$. Or $(A_S^*)_{S_i^*}$ est local de dimension 1, d'idéal maximal $(\mathfrak{H}_i^*)_{S_i^*}$ dont une base est $\{\phi_i(\theta), p\}$. Mais comme

$$\phi_i(\theta) = \frac{-p\mu(\theta)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \phi_j^{\alpha_j}(\theta)}$$

p est une base de $(\mathfrak{H}_i^*)_{S_i^*}$. $(A_S^*)_{S_i^*}$ est donc régulier et par suite normal.

Soit $\bar{\phi}_1(x)$ un facteur d'exposant $\alpha_1 > 1$ et supposons A_S^* normal. On peut alors engendrer \mathfrak{H}_1^* par $\phi_1(\theta)$ (même démonstration qu'en [I] pages 38-38). Nous avons vu qu'il existe $\mu(x) \in A[x]$ tel que :

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^q \phi_i^{\alpha_i}(x) + p \mu(x)$$

montrons que $\mu(\theta) \notin \mathfrak{H}_1^*$. Si $\mu(\theta) \in \mathfrak{H}_1^*$, $\mu(\theta) = \phi_1(\theta) \gamma(\theta)$. K étant le corps des quotients de A_S donc de A , on peut écrire dans $K[\theta]$:

$$\gamma(\theta) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1} \theta + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \theta^{n-1}$$

Posons $D = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$. $D\mu(\theta) = \phi_1(\theta) D\gamma(\theta) = \phi_1(\theta) \lambda(\theta)$ avec

$$\lambda(\theta) = a'_0 + a'_1 \theta + \dots + a'_{n-1} \theta^{n-1} \in A_S[\theta].$$

$$D\phi(\theta) = 0 = D \prod_{i=1}^q \phi_i^{\alpha_i}(\theta) + D\mu(\theta) = D \prod_{i=1}^q \phi_i^{\alpha_i}(\theta) + \phi_1(\theta) \lambda(\theta)$$

$$= \phi_1(\theta) \left[D \prod_{j=1}^q \phi_j^{\alpha_j}(\theta) + \lambda(\theta) \right]. \text{ Cette dernière égalité entraîne}$$

$$D \prod_{j=1}^q \phi_j^{\alpha_j}(\theta) + \lambda(\theta) = 0, \text{ ce qui est impossible car } \theta \text{ serait racine du polynôme}$$

D $\prod_{j=1}^q \phi_j^{\alpha_j}(x) + \lambda(x)$ dont le degré est strictement inférieur à celui de $\phi(x)$, n.

Nous pouvons conclure :

Si A_S^* est normal, $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun F_i^* pour i tel que $\alpha_i > 1$.

Réciproquement, si $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun F_i^* pour i tel que $\alpha_i > 1$, on peut écrire dans $(A_S^*)_{S_1^*}$ (une base de $(F_1^*)_{S_1^*}$ étant $[p, \phi_j(\theta)]$) :

$$p = \frac{- \prod_{i=1}^q \phi_i^{\alpha_i}(\theta)}{\mu(\theta)}$$

et par suite $(F_1^*)_{S_1^*}$ est engendré par $\phi_1(\theta)$ ce qui entraîne que $(A_S^*)_{S_1^*}$ est local régulier de dimension 1, donc intégralement clos. A_S^* est normal. (pour i tel que $\alpha_i = 1$ nous avons montré que $(A_S^*)_{S_1^*}$ est normal).

INTERPRETATION DE LA CONDITION " $\mu(\theta)$ N'APPARTIENT PAS A F_i^* A L'AIDE DE $\phi(x)$.

F_i^* étant engendré par $\phi_1(\theta)$ et \mathcal{H} , $\mu(\theta) \in F_i^*$ si, et seulement si, il existe $\lambda(\theta)$ et $q(\theta)$ dans A_S^* tels que :

$$\mu(\theta) = \lambda(\theta) \phi_1(\theta) + pq(\theta)$$

Posons $\psi(x) = \lambda(x) \phi_1(x) + pq(x)$. On a alors $\mu(x) = \psi(x) + \eta(x) \phi(x) = \psi(x) + \eta(x) \left[\prod_{i=1}^q \phi_i^{\alpha_i}(x) \right] + pq'(x)$, $q'(x)$ étant à coefficients dans A_S .

Le reste de la division de $\mu(x)$ par $\phi_1(x)$, comme celui de $\psi(x)$ par $\phi_1(x)$, a tous ses coefficients multiples de p . Réciproquement, s'il en est ainsi, $\mu(x) = \lambda(x) \phi_1(x) + pr(x)$ soit $\mu(\theta) = \lambda(\theta) \phi_1(\theta) + pr(\theta)$. $\mu(\theta)$ appartient à F_i^* . Remarquons qu'il revient au même de dire que le reste de la division de $\mu(x)$ par $\phi_1(x)$ a tous ses coefficients multiples de p , ou que le reste de la division de $\phi(x)$ par $\phi_1(x)$ a ses coefficients multiples de p^2 car $\phi(x) = \prod_{i=1}^q \phi_i^{\alpha_i}(x) + p\mu(x)$.

Nous pouvons énoncer :

Théorème : Soit A un anneau à élément unité, factoriel et de rang 1, plongé dans un suranneau B commutatif et sans diviseurs de zéro, ayant même élément unité que A et soit θ un élément de B , algébrique sur A , dont le polynôme caractéristique sur A est noté $\phi(x)$.

Soient : $\mathfrak{H} = (p)$ un idéal premier de A et $S = A -$

$\mathfrak{H}_S = \mathfrak{H} A_S$ l'idéal maximal de A_S

$\bar{\phi}_{\mathfrak{H}_S}(x)$ le polynôme déduit de $\phi(x)$ par passage aux classes des coefficients, modulo \mathfrak{H}_S , et $\prod_{i=1}^q \bar{\phi}_i^{\alpha_i}(x)$ sa décomposition dans $\frac{A_S}{\mathfrak{H}_S}[x]$ en facteurs premiers avec

$$\bar{\phi}_i(x) = \bar{\beta}_0 + \dots + \bar{\beta}_{n_i} x^{n_i} \quad \bar{\beta}_j \in \frac{A_S}{\mathfrak{H}_S} \quad j = \{0, 1, \dots, n_i\}$$

$$\phi_i(x) = \beta_0 + \dots + \beta_{n_i} x^{n_i}$$

où β_i est un représentant dans A_S de $\bar{\beta}_i$.

Alors pour que A^* soit intégralement clos, il faut et il suffit que, pour tout idéal premier $\mathfrak{H} = (p)$ de A , la condition C^* suivante soit réalisée:

(C^*) - Pour tout i tel que α_i est supérieur ou égal à 2 le reste de la division de $\phi(x)$ par $\phi_i(x)$ n'a pas ses coefficients tous multiples de p^2 .

Remarques : (1) Si il existe i tel que $\alpha_i \geq 2$ alors le discriminant d de $\phi(x)$ est nul modulo \mathfrak{H}_S . Autrement dit, si $d = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, il suffira de vérifier la condition (C^*) pour $(p_1), (p_2), \dots, (p_r)$.

(2) On peut relever $\bar{\phi}_i(x) = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 x + \dots + \bar{\beta}_{n_i} x^{n_i}$ dans A , car $\frac{A_S}{\mathfrak{H}_S}$ est isomorphe à $\frac{A}{(p)}$, donc dans chaque classe d'éléments $\bar{\beta}_i$ il y a un représentant situé dans A .

Exemples : (1) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $\theta = \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}$ $\phi(x) = 6x^2 + 2x - 1$ $d = 28 = 2^2 \times 7$.

Si $p = 2$ $\phi(x) = 2(3x^2 + 1) - 1$. $\bar{\phi}_{\mathfrak{H}_S}(x) = 1$.

Si $p = 7$ $\phi(x) = 6(x-1)^2 + 14x - 7$. Le reste de la division de $\phi(x)$ par $x-1$ est $+7$.

Il n'est pas multiple de 7^2 . Donc $\mathbb{Z}(\theta) = \mathbb{Z}^*$ est intégralement clos.

$$(2) \quad A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{R}, \quad \theta = \frac{1+\sqrt{6}}{5} \quad \phi(x) = 5x^2 - 2x - 1 \quad d = 3 \times 2^2$$

$\bar{\phi}(x) = 5(x-2)^2 + 3(6x-7)$. Le reste de la division de $\phi(x)$ par $(x-2)$ est $3 \times 5 = 15$ et $15 \notin (3^2)$.

De même $\phi(x) = 5(x+1)^2 - 2(6x+3)$. Le reste de la division de $\phi(x)$ par $(x+1)$ est 6. $6 \notin (2^2)$ donc $\mathbb{Z}(\frac{1+\sqrt{6}}{5}) = \mathbb{Z}^*$ est intégralement clos.

$$(3) \quad A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{R}, \quad \theta = \frac{5}{8} (1 + \sqrt{17}), \quad \phi(x) = 4x^2 - 5x - 25, \quad d = 5^2 \times 17$$

$\bar{\phi}(x) = 4x^2$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{5}$. Le reste de la division de $\phi(x)$ par x est $-25 = -5 \in (5^2)$.

Donc $\mathbb{Z} \left[\frac{5}{8} (1 + \sqrt{17}) \right]$ n'est pas intégralement clos dans \mathbb{R} .

IV - Dans ce paragraphe le lecteur trouvera deux démonstrations, l'une dite "classique" l'autre homologique de la proposition suivante :

Proposition : Si \mathbb{R}^* est local régulier et si θ est fortement entier sur A alors A est local régulier.

Première démonstration : Soit \mathfrak{m}_b^* l'idéal maximal de A^* . Alors $\mathfrak{m}_b^* \cap A = \mathfrak{m}_b$ est l'unique idéal maximal de A et $\dim A^* = \dim A$ (voir [I] chapitre I). Donc A est local. De plus si $\phi(x)$ est le polynôme caractéristique de θ sur A , alors $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}^{\lambda}(x)$ est la décomposition de $\bar{\phi}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A}{\mathfrak{m}_b}[x]$, et \mathfrak{m}_b^* est engendré par $\{\mathfrak{m}_b \phi(\theta)\}$ si $\lambda > 1$ et par \mathfrak{m}_b si $\lambda = 1$ (voir [I] chapitre I page 35).

Soit p la dimension commune de A et de A^* . Il suffit de montrer qu'une base minimale de \mathfrak{m}_b a exactement p éléments. Si q est le nombre d'éléments d'une base minimale de \mathfrak{m}_b , A étant local, $p \leq q$. Supposons $q > p$ et soit $\{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ une base minimale de \mathfrak{m}_b . Si $\lambda > 1$ $\{u_1, u_2, \dots, u_q, \phi'(\theta)\}$ est un système de générateurs de \mathfrak{m}_b^* et si $\lambda = 1$ $\{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ engendre \mathfrak{m}_b^* .

(a) Si tout les λ_p^j sont nuls, u_q, u_{q-1}, \dots, u_p s'expriment en fonction de u_1, u_2, \dots, u_{p-1} ce qui est impossible (voir cas $\lambda = 1$).

(b) Si un seul des λ_p^j est non nul, λ_p^p par exemple, alors

$$u_j = \lambda_1^j u_1 + \dots + \lambda_{p-1}^j u_{p-1} \quad j=q, q-1, \dots, p+1$$

$u_q, u_{q-1}, \dots, u_{p+1}$ s'expriment en fonction de u_1, \dots, u_{p-1} (même démonstration que dans le cas $\lambda = 1$) ce qui contredit la minimalité de la base de $\mathcal{B}\{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ donc $q=p$.

(c) Si plusieurs λ_p^j ne sont pas nuls, il existe parmi les μ_j correspondants un plus petit élément, soit μ_p par exemple. On a alors $\mu_j \geq \mu_p \quad \forall j = q, q-1, \dots, p$. λ_p^p étant inversible, on peut écrire

$$[\phi'(\omega)]^{\mu_p} = \frac{1}{\lambda_p^p} [u_p - \lambda_p^p u_1 - \lambda_2^p u_2 - \dots - \lambda_{p-1}^p u_{p-1}]$$

$$\text{Soit } u_j = \lambda_1^j u_1 + \dots + \lambda_{p-1}^j u_{p-1} + \lambda_p^j [\phi'(\omega)]^{\mu_j - \mu_p} \frac{[u_p - \lambda_1^p u_1 - \dots - \lambda_{p-1}^p u_{p-1}]}{\lambda_p^p}$$

$$j = q, q-1, \dots, p+1.$$

Ce qui s'écrit encore

$$u_j = \alpha_1^j u_1 + \alpha_2^j u_2 + \dots + \alpha_p^j u_p \quad j = q, q-1, \dots, p+1$$

où $\alpha_1^j \in A^*$. On est ramené au système (I) du cas $\lambda = 1$, donc à une impossibilité donc $q=p$ et A est local régulier.

Deuxième démonstration : Soit M un A -module. Le A^* -module déduit de M par extension à A^* de l'anneau des scalaires sera noté M_{A^*} et on a $M_{A^*} = M \otimes_A A^*$

Propriété 1 : Si M est un A -module libre de type fini alors M_{A^*} est un A^* -module de type fini.

En effet on peut écrire $M = \bigoplus_{i=1}^n Ae_i$ où $\{e_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ est une base de M . $M \otimes_A A^* = (\bigoplus_{i=1}^n Ae_i) \otimes_A A^* = \bigoplus_{i=1}^n (Ae_i \otimes_A A^*)$ car le produit tensoriel commute aux sommes directes. Ae_i est isomorphe à A , donc $Ae_i \otimes_A A^*$ est isomorphe à A^* et $M \otimes_A A^*$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^n A^* = (A^*)^n$ qui est un A^* -module libre de type fini.

Plus généralement si M est un A -module libre M_{A^*} est un A^* -module libre.

Propriété 2 : Soient M', M, M'' des A -modules tels que on ait la suite exacte

$$(1) \quad M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

alors la suite de A modules

$$(2) \quad M'_{A^*} \xrightarrow{f \otimes 1_{A^*}} M_{A^*} \xrightarrow{g \otimes 1_{A^*}} M''_{A^*} \rightarrow 0$$

est exacte.

Le foncteur $\cdot \otimes_A A^*$ étant exact à droite, (2) est une suite exacte de A^* -modules. C'est aussi une suite exacte de A^* -module car les A -homomorphismes $f \otimes 1_{A^*}$ et $g \otimes 1_{A^*}$ sont aussi des A^* -homomorphismes :

$$\begin{aligned} (f \otimes 1_{A^*})(\lambda^*(m' \otimes a^*)) &= (f \otimes 1_{A^*})(m' \otimes \lambda^* a^*) = (f(m') \otimes \lambda^* a^*) = \lambda^*(f(m') \otimes a^*) \\ &= \lambda^*(f \otimes 1_{A^*})(m' \otimes a^*) \text{ avec } \lambda^*, a^* \in A^*, m' \in M. \end{aligned}$$

De même pour $g \otimes 1_{A^*}$.

Propriété 3. A^* étant un A -module fidèlement plat (\mathcal{O} fortement entier sur A , donc A^* libre) il y a équivalence entre les assertions suivantes :

$$(1) \quad M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \text{ est une suite exacte de } A\text{-modules}$$

$$(2) \quad M'_{A^*} \xrightarrow{f \otimes 1_{A^*}} M_{A^*} \xrightarrow{g \otimes 1_{A^*}} M''_{A^*} \text{ est une suite exacte de } A^*\text{-modules.}$$

\mathcal{O} étant fortement entier sur A , A^* local $\Rightarrow A$ local ((I) chapitre I page 35).

Pour démontrer qu'il est régulier nous allons utiliser la caractérisation suivante des anneaux locaux réguliers ([VI] théorème de Serre-Buschbaum-Auslander) :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau local soit régulier est que sa dimension homologique globale soit finie.

Rappelons que, si A est un anneau local noethérien,

(1) la dimension homologique globale de A , notée $S(A)$, est la borne supérieure des dimensions homologiques des A -modules M de type fini.

(2) la dimension homologique d'un A -module de type fini, notée $dh_A(M)$, est le plus petit entier n tel que $Tor_{n+1}(M, A/M) = (0)$.

Nous allons montrer que si ℓ est la dimension de A , donc aussi de A^* , pour tout A -module M de type fini $dh_A M \leq \ell$.

M étant un A -module de type fini et A un anneau local noethérien, il existe une résolution libre de type fini de M .

$$(1) \dots \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Montrons alors que

$$(2) \dots \longrightarrow L_n \otimes_A A^* \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 \otimes_A A^* \longrightarrow L_0 \otimes_A A^* \longrightarrow M \otimes_A A^* \longrightarrow 0$$

est une résolution libre de type fini du A^* -module $M_{A^*} = M \otimes_A A^*$. Cela résulte immédiatement des propriétés 1 et 2 ou 1 et 3.

M étant un A -module de type fini, M_{A^*} est un A^* -module de type fini car si

$\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ est un système de générateurs de M , $\{e_1 \otimes 1, e_2 \otimes 1, \dots, e_p \otimes 1\}$ est un système de générateurs de A^* -module M_{A^*} . A^* étant local régulier $dh_{A^*}(M_{A^*}) = n \leq \ell$.

Alors ([VI] théorème 6 page 75).

$$L_n^* = \text{Ker} \left[L_{n-1} \otimes_A A^* \longrightarrow L_{n-2} \otimes_A A^* \right]$$

est un A^* -module libre de type fini et on a la suite exacte de A^* -module :

$$(3) 0 \longrightarrow L_n^* \longrightarrow L_{n-1} \otimes_A A^* \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 \otimes_A A^* \longrightarrow L_0 \otimes_A A^* \longrightarrow M \otimes_A A^* \longrightarrow 0$$

Soit R_n le noyau de $L_{n-1} \otimes_A A^* \longrightarrow L_{n-2} \otimes_A A^*$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow R_n \longrightarrow L_{n-1} \otimes_A A^* \longrightarrow L_{n-2} \otimes_A A^*$$

A^* étant plat, on en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow R_n \otimes_A A^* \longrightarrow L_{n-1} \otimes_A A^* \longrightarrow L_{n-2} \otimes_A A^*$$

ce qui montre que $R_n \otimes_A A^* = L_n^*$. Montrons que R_n est un A -module libre de type fini,

En effet :

$R_n \otimes_A A^*$ est un A^* -module libre de type fini. A^* étant un A -module libre de type fini, $R_n \otimes_A A^*$ est un A -module libre de type fini. De plus $A^* = \bigoplus_{i=0}^{q-1} A \otimes^i (q-d^\circ(\phi(x)))$ entraîne $R_n \otimes_A A^* = \bigoplus_{i=0}^{q-1} (R_n \otimes_A \mathcal{O}^i)$. $A \otimes^i$ étant isomorphe à A , $R_n \otimes_A \mathcal{O}^i$ est isomorphe à R_n . $R_n \otimes_A A^*$ est isomorphe en tant que A -module à $\bigoplus_{i=0}^{q-1} R_n$ qui est donc un A -module libre de type fini et par conséquent R_n aussi.

On a la suite exacte

$$(4) \quad 0 \longrightarrow R_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow L_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

qui est une résolution libre de type fini de M . La formule de décalage des Tor nous donne :

$$\text{Tor}_{n+1}^A(M, A/\mathfrak{m}_b) = \text{Tor}_1^A(R_n, A/\mathfrak{m}_b) = 0 \text{ car } R_n \text{ est libre donc}$$

$$\text{dh}_A(M) \leq n \leq \ell.$$

BIBLIOGRAPHIE

- I G. MAURY : La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques. Thèse chapitre I. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3e série, t.78, p.3L à 100.
- II P. DUBREIL
et M.L. DUBREIL-
JACOTIN : Leçons d'algèbre moderne. Dunod, Paris 1961.
- III ZARISKI et
SAMUEL : Commutative algebra.
- IV O.G. NORTHCOTT : Idealtheorie, Cambridge University Press 1953.
- V N. BOURBAKI : Algèbre commutative.
- VI P. SAMUEL : Anneaux factoriels.