MARCEL BRISSAUD

Sur une extension d'un théorème de Tortrat

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970, tome 7, fascicule 1
, p. 86-103
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_1_86_0>

SUR UNE EXTENSION

D'UN THEOREME DE TORTRAT

concernant des éléments aléatoires convolués dans un demi-groupe topologique localement compact et séparable.

par Marcel BRISSAUD

Cet article essaie d'expliquer comment, par des considérations probabilistes, nous avons élargi un théorème qui initialement s'appuyait sur une propriété algébrique. Les résultats, sans explications figurent dans (1) , la démonstration sans commentaires dans (2). Voici quelques mots sur notre démarche.

NOTATIONS ET DEFINITIONS PRELIMINAIRES :

$(\Omega, \mathcal{A}, p)$ espace de probabilité

(D,T) demi-groupe topologique séparé, localement compact et séparable. $\mathcal{X}$ aléatoire au sens fort, à valeurs dans (D,T), c.a.d. application de Ω dans D telle que pour tout borélien B de (D,T), l'ensemble

$$\{\omega\ ,\ \omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

Nous posons $P(B) = p\{\omega\ ;\ X(\omega) \in B\}$

alors P est une probabilité induite de Borel et régulière.

Support de X (ou support de P).

$s(P) = \{x \in D \;;\; p\{V_x\} > o$ pour tout voisinage ouvert de $x\}$.

Ce support engendre un demi-groupe $<s(P)>$. Sa fermeture topologique dans (D,T) est un demi-groupe topologique fermé et nous prendrons dorénavant

$D = \overline{<s(P)>}$.

Convoluée :

Soit $\{X_i\}$ une suite d'aléatoire de $(\Omega,\mathcal{A},p)$ dans (D,T), indépendantes et de même loi que X.

$$X_{j+1} \ldots X_{j+n} \;:\; \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto X_{j+1}(\omega_1) \ldots\ldots X_{j+n}(\omega_n)$$

$$\Omega^n \longmapsto (D,T)$$

si A est un sous-ensemble quelconque de D
nous désignons par e(j,n,A) l'évènement : « $X_{j+1} \ldots X_{j+N}(\omega) \in A$ ».

Si B est un borélien de (D,T) nous posons (3)

$$\mu'\{e(j,n,B)\} = p^{*n}(B) = \int_D \int_D I_B(xy) \,.\, p^{*n-1}(dx).P(dy)$$

avec $I_B(.)$ fonction indicatrice de B

Soit $\mathcal{A}'$ la famille additive engendrée par les e(j,n,B) quand j est un entier $\geqslant 0$, n un entier > 0, et B un borélien de (D,T).

Nous complétons μ' et $\mathcal{A}'$ en μ et $\mathcal{A}$, de manière à ce que si e' est un évènement quelconque inclus dans l'évènement aléatoire e de probabilité nulle, alors $\mu(e') = \mu(e) = 0$.

Quelques propriétés :

Considérons l'évènement aléatoire $e(j,n,B)$. Nous donnerons aux divers indices les qualificatifs suivants :

j : indice de position

n : longueur de la convoluée

$(j,n) := \{$ensemble des entiers de $j + 1$ à $j + n\}$: intervalle de l'évènement

B : borélien d'arrivée.

. 1ère propriété :

Le processus défini par les diverses convoluées est homogène en position dans le sens suivant :

$$\mu\{e(j,n,B)\} = \mu\{e(j',n,B)\}$$

. 2ème propriété :

Si deux évènements ont des intervalles disjoints alors nous avons :

$$\mu\{e(j,n,B) \,\Pi\, e(j',n',B')\} = \mu\{e(j,n,B)\} \cdot \mu\{e(j',n',B')\}$$

. 3ème propriété :

Si deux évènements ont le même intervalle mais des boréliens d'arrivée disjoints dans (D,T) alors :

$$\mu\{e(j,n,B) \amalg e(j,n,B')\} = \mu\{e(j,n,B)\} + \mu\{e(j,n,B')\}$$

Lemmes préliminaires :

Lemme 1 : *Nous avons toujours* $\overline{[\,s(P)\,]^n} = s(P^{*n})$

Lemme 2 : *Le demi-groupe engendré par* s(P) *est égal à* $\bigsqcup_{n \in \mathbf{N}^*} [\, s(P) \,]^n$

Lemme 3 : *Si* x *est un élément quelconque du demi-groupe fermé* D ***engendré*** *par le support de* P, *alors il existe un entier* n_0 *tel que pour tout voisinage ouvert* V *de* x *nous avons :*

$$P^{*n_0}(V) > 0$$

Lemme 4 : *Soit* K *un sous-ensemble compact du demi-groupe topologique fermé* (D,T) ;
soit V *un voisinage ouvert quelconque de* I, *l'idéal* ***quelconque de*** D ;
soit A *un sous-ensemble non vide de* I,

Alors, il existe un voisinage ouvert W *de* A *tel que*

$$K.W.K \subset V$$

q-espace de probabilité :

Nous désignons par β la famille additive des boréliens de (D,T).
Soit $\mathcal{A}$ la famille additive engendrée par les évènements :

$$\left\{ e(j,n,B) \right\} \qquad \text{avec} \quad J \in \mathbf{N} \;,\; n \in \mathbf{N}^* \quad \text{et } B \in \beta$$

Si n est un entier positif quelconque :

Soit $\mathcal{A}_n^*$ la famille additive engendrée par les évènements

$$\left\{ e(j,m,B) \right\} \qquad \text{avec} \qquad (j,m) \subset (0,n) \qquad \text{et} \quad B \in \beta$$

soit r_n la probabilité produit unique (complète) induite sur la famille additive complète $\overset{n}{\underset{1}{\otimes}} \beta$ engendrée par le produit des n familles additives β.

Du fait de l'identification des évènements :

$e(j,m,B)$ et $e(O,j,D) \sqcap e(j,m,B) \sqcap e(j+m\ ,\ n-j-m\ ,\ D)$

à tout élément u de $\mathcal{A}^*_n$ correspond un unique borélien A de $\overset{n}{\underset{1}{\otimes}} \beta$ et $\mu(u) = r_n(A)$

d'où le q-espace de probabilité $[\Omega_0\ , \mathcal{A}, \mathcal{A}^*_n\ , \mu\ ]$

avec μ probabilité sur $\mathcal{A}^*_n$.

Pour tout n nous pouvons toujours travailler dans le q-espace de probabilité correspondant et c'est dans ce q-espace que nous démontrons en particulier le lemme n° 1 ci-dessus.

Si nous introduisons un sous-ensemble de «conditions» (4) nous aurons alors des q-espaces de probabilité conditionnée :

1) $[\Omega_0\ , \mathcal{A}, \mathcal{C}, (\mathcal{A} \times \mathcal{C})^*_n, \nu]$ avec $\nu(A \mid c) = \dfrac{\mu(A \sqcap c)}{\mu(c)}$

2) $[\Omega_0\ , \mathcal{A}, \mathcal{C}, (\mathcal{A} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C})^*_n\ , w]$ avec $w(A \mid c \sqcap c') = \dfrac{\mu(A \sqcap c \sqcap c')}{\mu(c \sqcap c')}$

Ces notions permettent, pour $n \in \mathbf{N}^*$, de travailler avec des probabilités μ, ν et w , mais il n'est pas possible de passer à une infinité de convolutions car il est bien connu que μ ne sera une probabilité que sous certaines conditions (compatibilité et compacité) - vérifiées par exemple si D est polonais (5).

Le théorème général :

Soit une aléatoire X *à valeurs dans un demi-groupe topologique* (D,T) *- séparé, localement compact et séparable-*
Supposons qu'il existe un sous-ensemble compact K *de* D ***vérifiant*** *les hypothèses suivantes :*

- *pour tout* $\eta > 0$
il existe un borélien B_η *de* D
un entier N_1
un entier N_2

avec $\mu \{ e(j', N_1, B_\eta) \} > 0$ *pour tout* $j' \in \mathbf{N}$

puis si $(j', N_1) \subset (j, N_2) \subset (j, n)$

nous avons $\nu (e(j,n,K) \mid e(j',N_1,B_\eta)) > 1 - \eta$ *dans le* q*-espace de probabilité conditionnelle du 1-er type engendré par*

$$[\Omega_0, \mathcal{A}, \mathcal{A}_n^*, \mu] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \{ e(j', N_1, B_\eta) \}_{j' \in \mathbf{N}}$$

Alors :

dans le q*-espace de probabilité conditionnelle du 2-ème type*

$$[\Omega_0, \mathcal{A}, \mathcal{C}, (\mathcal{A} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C})_n^*, w]$$

pour tout $\epsilon > 0$ *, et tout voisinage ouvert* V *de* I, ***idéal bilatère*** *de* D, *il existe un entier* $N(\epsilon)$ *tel que si* $n \geqslant N(\epsilon)'$

$$w(e(0,n,V) \mid e(o,N_1,B_\eta) \, \Pi \, e(j_\epsilon, N_1, B_\eta)) > 1 - \epsilon$$

Commentaires : Un des premiers théorèmes de ce type provient d'un **résultat** de Rosenblatt (6) :

Si I *est un idéal fermé du demi-groupe topologique* D *compact pour tout voisinage ouvert* V *de* I *et pour tout* $\epsilon > 0$ *, il existe un entier* $n(\epsilon, V)$ *tel que si* $n \geqslant n(\epsilon, V)$ *alors* $P^{*n}(V) > 1 - \epsilon$.

Il est évident que nous sommes dans un cas particulier du théorème général. Ce théorème général tient en prenant $K = D$. La compacité de D fait que les hypothèse s sont vérifiées et les évènements conditionnés sont des évènements certains.

C'est ainsi que Grenander cite le résultat particulier suivant (7) :

Si D *est un demi-groupe topologique compact avec un zéro et si ce zéro appartient au support de* P *alors* P^{*n} *tend vers la probabilité qui a toute sa masse au point zéro.*

Nous devons remarquer que ce cas particulier de Grenander n'exploite pas, et de loin, tout le résultat de Rosenblatt puisqu'il suffit que le zéro -s'il existe- appartienne à D : demi-groupe compact engendré par le support de P.

Un des théorèmes beaucoup plus large provient du travail de Tortrat (8) qui permet de dire :

Dès que P *est tendue suivant des idéaux compacts* K_ϵ *(dans le sens où pour tout* $\epsilon > 0$ *, il existe* K_ϵ *avec* $P(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$*) alors* $P^{*n}(V) > 1 - \epsilon$.

Mais dans une note personnelle Tortrat (9) précisait qu'il suffisait qu'existe un idéal compact K tel que $P(K) > 0$, d'où notre formulation dans (1) , que nous rappelons :

X *étant une aléatoire à valeurs dans un demi-groupe topologique séparé,* P *la probabilité induite par* X*,* P^{*n} *la n-ème convoluée de* P*,* D *le demi-groupe fermé engendré par le support de* P *, si* D *possède un ideal compact* K *tel que* $P(K) > 0$ *, alors :*

1°) D possède un idéal minimal compact I unique

2°) pour tout voisinage ouvert V de I nous avons :

$$\lim_{n \to \infty} P^{*n}(V) = 1$$

La démonstration du théorème de Rosenblatt consiste à utiliser le lemme 4 avec K = D.

d'où

$$e(0,j,D) \sqcap e(j,n_0,W) \sqcap e(j+n_0 , n-j-n_0, D) \subset e(o,n,V)$$

ce qui revient à dire :

$$e(j,n_0,W) \subset e(o,n,V)$$

puis $\bigsqcup_{j=s.n_0} e(j,n_0,W) \subset e(o,n,V)$

avec s de 0 à k-1

d'où (ceci se passe dans le q-espace $[\Omega_0 , \mathcal{A}, \mathcal{A}_n^* , \mu]$)

$$\mu [e(o,n,V^c)] \leqslant \mu (\bigsqcap_{S=0}^{k-1} e(sn_0, n_0 , W^c)]$$

$$\leqslant \prod_{S=0}^{k-1} \mu [e(sn_0 , n_0 , W^c)]$$

et comme $\mu [e(j,n_0,W)] = a > 0$ (lemme 3)

$\mu [e(o,n,V)] > 1 - (1-a)^k$ ce qui permet la majoration demandée.

La démonstration du théorème de Tortrat consiste à remarquer que $e(o,j+1,K) \,\Pi\, e(j+1,n_0,W) \,\Pi\, e(j+1+n_0, n-j-1-n_0,K) \subset e(0,n,V)$ peut s'écrire :

$$\underbrace{e(j,1,K) \,\Pi\, e(j+1,n_0,W) \,\Pi\, e(j+1+n_0,1,K)}_{A_j} \subset e(0\ n,V)$$

puis si $n \geqslant k(n_0+2)$

$$\bigsqcup_{\substack{j=s(n_0+2)\\ s \text{ de } 0 \text{ à } k-1}} A_j \subset e(o,n,V)$$

et comme $\mu(A_j) = a > 0$, nous obtenons comme précédemment la majoration souhaitée.

Il faut dire que dans le premier cas l'hypothèse «D compact» est une propriété très forte qui limite considérablement le champ d'application du théorème de Rosenblatt.

Il est visible que dans le 2-ème cas la propriété algébrique de K, à savoir, être un idéal, a pour conséquence d'entrainer que les conditions recquises par le théorème général sont vérifiées et que dès que $x \in K$ nous avons $xy \in K$ qui est un évènement certain.

Les diverses extensions :

La première est la suivante :

> *Si il existe un idéal compact* K *et un entier* N *tel que* $P^{*N}(K) > 0$ *les résultats sont les mêmes.*

Cette extension a la particularité d'absorber immédiatement le cas où, par exemple, le demi-groupe topologique est non compact mais possède un seul idéal compact le zéro Z avec $P(Z) = 0$ et des diviseurs de zéro a et b tels que $P(a) > 0$ et $P(b) > 0$. Car alors il est immédiat que $P^{*2}(Z) > 0$.

Exemples : Considérons le demi-groupe (pour la multiplication) des fonctions réelles continues définies sur $[0,N]$. Ce demi-groupe peut être muni de la topologie de la convergence uniforme. Il possède un zéro qui est $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,N]$.

Soient : $f_1(x) \neq 0$ si $x \in [0,N]$

$f_2(x) = 0$ si $x \in [0,1]$ et $\neq 0$ sinon

....

$f_j(x) = 0$ si $x \in [j-1,j]$ et $\neq 0$ ailleurs

....

$f_N(x) = 0$ si $x \in [N-1,N]$ et $\neq 0$ ailleurs

il est immédiat que

$$f_1 \dots f_N \equiv 0$$

et si nous posons $P(f_j) = 1/N$ pour j de 1 à N

le zéro appartient au demi-groupe engendré par de support de P,

dans le cas général ce demi-groupe n'est pas compact (il pourrait être compact si $f_j(x)$ prenait certaines valeurs sélectionnées dans ce but).

et ainsi nous avons :

$$P^{*N}(0) = (1/N)^N > 0$$

ce qui nous permet d'appliquer le théorème et nous en concluons que pour tout voisinage ouvert de $f \equiv 0$ nous avons $P^{*n}(V) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Il est évident que cette première extension continue à n'appliquer que des propriétés algébriques fortes provenant de la qualité de K d'être un idéal.

Deuxième extension :

Cette deuxième extension consiste à substituer à l'évènement certain $xy \in K$ dès que $x \in K$ (idéal), *un évènement presque certain qui est le suivant :*

pour m *assez grand* $\mu[\, e(j,m,K)\,] > 1 - \eta$

ce qui est proche de $\mu[\, e(j,m,D)\,]$ qui vaut toujours 1.

Alors

puisque $\underbrace{e(o,m,K) \sqcap e(m,n_0,W) \sqcap e(m+n_0,n-m-n_0,K)}_{A} \subset e(o,n,V)$

et que $A \subset e(m,n_0,W) = B$ nous avons $\mu(A^c - B^c) < 2\eta$

Et en remarquant, comme précédemment, que

$$\mu\left(\prod_{i\ 1}^{k} B_i^c\right) \leqslant (1-a)^k \qquad \text{dès que} \quad \mu(B_i) = a > 0$$

nous concluons que

$$\mu\,[\, e(o,n,V^c)\,] \leqslant \mu\left(\prod_{i\ 1}^{k} A_i^c\right) \leqslant (1-a)^k + 2k\eta$$

ce qui permet la majoration

$$\mu\,[\, e(o,n,V)\,] > 1 - \epsilon \quad \text{dès que n est assez grand}$$

Cette deuxième extension permet de résoudre des problèmes où aucun idéal compact du demi-groupe ne possède une probabilité strictement positive. Voici un exemple :

Exemples :

Soit $S = \mathbb{T} \times [0, +\infty[$ muni de la loi

$$(x,y).(x',y') = (x \dot{+} x', yy') \quad (\dot{+} \text{ addition modulo 1 sur le tore})$$

La topologie est la topologie produit à partir des intervalles ouverts sur le tore $\mathbb{T}$ et des intervalles ouverts sur le demi-axe réel.

Considérons l'aléatoire X telle que $P\{X(\omega) = (\alpha, a)\} = p > 0$

$$P\{X(\omega) = (\alpha, 1/a)\} = q = 1 - p > 0$$

avec $[a \in]o,1[$

et α irrationnel.

Le demi-groupe engendré est

$$D = \mathbb{T} \times \left[[o] \bigsqcup_1^{\infty} (a^n) \bigsqcup_1^{\infty} \left(\frac{1}{a^n}\right) \sqcup [1] \right]$$

D possède un seul idéal compact $\mathbb{T} \times [o]$ et D est non compact.

Les théorèmes provenant des travaux de Rosenblatt et de Tortrat ne s'appliquent pas.

Cependant, soit le compact $K = (\mathbb{T} \times [o,1]) \cap D$

Dès que $p > 1/2$ nous avons $p^{*n}(K^c) > 1 - \epsilon$ pour $n \geqslant n(\epsilon)$

En conséquence l'extension précédente s'applique et si V est un voisinage ouvert de $\mathbb{T} \times [o]$, par exemple $\mathbb{T} \times [o,t[$, alors $P^{*n}(V) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

Troisième extension :

Elle consiste à considérer que l'évènement e(j,m,K) , *pour* m *assez grand, a une probabilité supérieure à* $1 - \epsilon$, *dès qu'une certaine condition est vérifiée.* Nous avons ainsi le théorème général: Il est évident que le résultat sera alors vrai, si la condition est vérifiée.

Mais, comme dans l'extension précédente, l'hypothèse algébrique d'avoir un *idéal* compact K est remplacée par une hypothèse probabiliste, beaucoup moins forte.

Cas particuliers :

Si le demi-groupe est commutatif le théorème général prend une forme plus simple. *Car la commutativité, comme propriété algébrique remplace des hypothèses probabilistes que nous avions formulées.*

L'ensemble des conditions se réduit à un seul évènement aléatoire :

$$\mathscr{C} = \{e(0,N_1,B_\eta)\}$$

et le résultat est valable avec cette unique condition dans l'espace de probabilité conditionnelle du 1er type.

Exemple : Notre théorème couvre alors le problème très simple du «pile ou face».

Dans l'espace $\bar{\mathbf{R}}$ nous pouvons considérer les demi-groupes$(\mathbf{R} \sqcup + \infty)$ et $(\mathbf{R} \sqcup - \infty)$, munisde la topologie habituelle sur $\bar{\mathbf{R}}$ et de la loi additive.

Considérons l'aléatoire X telle que $P\{X(\omega) = +1\} = 1/2$

$$P\{X(\omega) = -1\} = 1/2$$

Dans le demi-groupe engendré $D = \mathbf{Z} \sqcup (+\infty)$ nous considérons le compact $K = D \sqcap [0, +\infty]$

pour tout $\eta > 0$, il existe N_1 tel que $(1/2)^{N_1} < \eta/2$

$$B_\eta = [N_1, +\infty]$$

$$\mu\{e(j',N_1,B\eta)\} = (1/2)^{N_1} > 0$$

Si $e(0,N_1,B\eta)$ est réalisé, les points n'appartenant pas à K sont tels que + 1 sort s fois , - 1 sort t fois avec $t\text{-}s > N_1$

la loi binomiale nous donne alors : (pour $n > N_1$)

$$\nu\left(e(0,n,]-\infty,0[)\;\middle|\; e(0,N_1,[N_1,+\infty])\right) < (4/3).(1/2)^{N_1} < \eta$$

ce qui entraine la conclusion, à savoir :

$\epsilon > 0$ étant choisi, il existe $N(\epsilon)$ tel que si $n \geqslant N(\epsilon)$ alors

$$\nu\left(e(0,n,]a,+\infty])\;\middle|\; e(0,N_1,[N_1,+\infty])\right) > 1-\epsilon$$

En effet K étant fixé, cela entraine l'existence de W voisinage ouvert d'un point de l'idéal, (à savoir $+\infty$), tel que $K.W \subset V =]a, +\infty]$

puis il existe n_0 tel que $\mu\{e(j,n_0,W)\} = \alpha > 0$

d'où k tel que $(1\text{-}\alpha)^k < \epsilon/2$

puis η tel que $2k\eta < \epsilon/2$

cela entraine une valeur pour N_1 pour que $(1/2)^{N_1} < \eta/2$

N_1 donne B_η et alors nous prenons

$$N(\epsilon) = N_1 + kn_0$$

ce qui permet de dire que si $n \geqslant N(\epsilon)$ nous avons

$$\nu\left(e(0,n,]a,+\infty]) \;\middle|\; e(0,N_1,[N_1,+\infty])\right) > 1-\epsilon$$

Il est évident que par symétrie le même travail se fait pour le demi-groupe $D' = \mathbf{Z} \sqcup (-\infty)$.

Cet exemple est donné dans un but purement illustratif, étant bien entendu que la solution du problème posé est connue et s'obtient directement sans difficulté.

Deuxième exemple :

Si nous nous plaçons à nouveau dans $\mathbf{S} = \prod \times [o, +\infty[$

avec $\quad P\{X(\omega) = (\alpha, a)\} = 1/2$

et $\quad P\{X(\omega) = (\alpha, 1/a)\} = 1/2$

avec $a \in]0,1[$ et α irrationel

nous obtenons pour $N_2 \geqslant N_1$

$$\nu\left(e(o,n,\prod \times [0,t[) \;\middle|\; e(0,N_2,\prod \times [0,a^{N_1}])\right) > 1-\epsilon$$

et si L est un sous-ensemble de S tel que $\mathring{L} \sqcap (\prod \times \{o\}) \neq \emptyset$

il y a récurrence conditionnée quasi-positive dans L, c'est-à-dire l'espérance du «nombre de passages des convoluées» dans L tend vers $+\infty$, si la condition $\mathscr{C}$ est réalisée.

Extension au cas particulier des multi-aléatoires :

Pour ne pas allonger cet article nous devons renvoyer le lecteur aux définitions et propriétés précisées dans (1) et (2) concernant les multi-aléatoires.

Si $\mathcal{G}$ est le demi-groupe fermé engendré par le support de X
Si I est un idéal (bilatère) de (D,T), nous savons que $I^W \sqcap \mathcal{G}$ est un idéal de $\mathcal{G}$.
Nous avons établi que le théorème général tenait en considérant ou bien un compact de $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ ou bien un sous-ensemble du type K^W, avec K compact de (D,T). Nous obtenons alors :

$$\mathcal{W}\left(e(0,n,V^W \sqcap \mathcal{G}) \;\middle|\; e(0,N_1, \mathfrak{B}_\eta) \sqcap e(j_2,N_1,\mathfrak{B}_\eta)\right) > 1 - \epsilon$$

avec V voisinage ouvert de I (dans (D,T)).

(Nous désignons par A^W l'ensemble des compacts non vides de (D,T) qui ont avec A une intersection non vide).

La qualité de K d'être compact n'entraine pas la compacité de K^W. Il est facile de trouver un contre-exemple.

Application : Pour éviter des longueurs nous reprenons l'exemple précédent, en considérant sur S une multi-aléatoire excessivement simple :

$$P\{X(\omega) = (a, [1/2 \sqcup 2])\} = 1/2$$

$$P\{X(\omega) = (a, [2])\} = 1/2 \qquad \text{avec } a \text{ irrationel}$$

$$D = \text{trace de } \mathcal{G} = \Pi \times \{[o] \bigsqcup_1^\infty (1/2)^n \bigsqcup_1^\infty 2^n \sqcup [1]\}$$

$$I = \text{idéal de } D = \Pi \times [o]$$

Soit le compact $K = (\Pi \times [o,1]) \sqcap D$

il est immédiat que K^W est non compact

et nous obtenons pour $n \geqslant N(\epsilon) = N_2 + kn_0$

$$\gamma\left(e(0,n,(\prod X[0,t[\,)^{W}) \;\middle|\; e(0,N_2,(\prod X[0,(1/2)^{N_1}]\,)^{W})\right) > 1 - \epsilon$$

Remarque :

Une autre des premières extensions du théorème de Tortrat était de considérer l'existence d'un idéal compact à droite de D. D'où l'énoncé :

Supposons que pour tout $\eta > 0$, il existe :

1) un idéal à droite compact de (D,T), soit K_η
2) un entier N_η tel que si $n \geqslant N_\eta$

$$\mu\left\{e(j,n,K_\eta)\right\} > 1 - \eta$$

Alors

quel que soit $\epsilon > 0$ et pour tout voisinage V de l'idéal bilatère I de D, il existe un entier $N(\epsilon)$ tel que si $n \geqslant N(\epsilon)$

$$\mu\left\{e(0,n,V)\right\} > 1 - \epsilon$$

On pourrait partir des mêmes considérations que précédemment pour substituer à la propriété algébrique forte (K_η idéal à droite) une hypothèse probabiliste, mais l'on retrouve en fait le théorème général:

Conclusion : *Il apparait qu'en suivant une démarche du même type un certain nombre de théorèmes du calcul des probabilités pourraient être utilement étendus en reprenant leurs démonstrations points par points et en essayant de remplacer les propriétés algébriques qui interviennent par des hypothèses probabilistes.*

La discussion est ouverte.

Bibliographie :

(1) CRAS t. 268. A.p. 1286-1289 - 28 mai 1969.
t. 269. A.p. 715 - 718 - 20 octobre 1969.
t. 269. A.p. 857 - 860 - 3 novembre 1969.

(2) Thèse de 3ème cycle - chapitre II

(3) U. Grenander-Probabilities on algebraic structures 1963 - chap. 2.

(4) A. Renyi - Theor. Verojat. Prim. 1-1956 - p. 61-71 et Calcul des Probabilités - Dunod.

(5) J. Neveu - Bases mathématiques du Calcul des Probabilités- Masson - chap. III § 1 et 2.

(6) Rosenblatt - J.Math. mech. - 9-1960 ; p. 293-306 et Theor.Verojat.Prim. 2-1964- p. 180-197.

(7) U. Grenander - idem - page 192.

(8) A. Tortrat - CRAS- t. 261 - A-p. 3941-3944.

(9) note personnelle de A. Tortrat à R. Féron.

Manuscrit remis en décembre 1969.

M. BRISSAUD
Maître-Assistant
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Lyon
43, boulevard du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE