MARCEL GRANGE

Sur la bornologie de l'ordre

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 3
, p. 11-33
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_3_11_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 165-187

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973, t. 10-3

SUR LA BORNOLOGIE DE L'ORDRE

par

Marcel GRANGE (Bordeaux)

---o0o---

Si on se donne un espace vectoriel ordonné filtrant E on peut munir canoniquement E d'une bornologie convexe dont une base est formée des intervalles d'ordre $[-x,x]$, noté B_x, pour $x \geq 0$. L'espace bornologique convexe (cf. appendice) obtenu est noté $B_\omega E$.

Cet exposé est consacré à l'étude de quelques questions relatives à la bornologie de $B_\omega E$, appelée bornologie de l'ordre, dans le cas particulier où E est un espace vectoriel réticulé (en abrégé e.v.r.).

On peut se poser le problème naturel suivant : trouver une condition nécessaire, ou suffisante, ou nécessaire et suffisante sur l'e v r E pour que l'ebc $B_\omega E$ possède telle ou telle propriété bornologique.

Dans la première partie nous étudions la complétude de $B_\omega E$ (cf. appendice) et aussi quelques questions relatives aux bornologies complètes solides (cf. appendice) car de nombreux espaces fonctionnels ordonnés se présentent naturellement muni d'une bornologie complète solide qui n'est pas toujours la bornologie de l'ordre.

Dans la deuxième partie nous étudions quelques questions sur les différentes sortes de réflexivité que l'on peut concevoir pour un espace vectoriel réticulé.

Dans la troisième et dernière partie nous caractérisons les espaces vectoriels réticulés E tels que $B_\omega E$ soit un ebc de Schwartz ou Infra-Schwartz ; puis quelques questions qui s'y rattachent.

A propos du problème général indiqué plus haut nous indiquons ci-après pour mémoire quelques résultats immédiats ou connus.

1. - E est un e v r archimédien si et seulement si $B_\omega E$ est un ebc séparé.

2. - E possède une unité (d'ordre) si et seulement si $B_\omega E$ est simple (possède un borné bornivore).

3. - Le cône des éléments positifs de E possède une partie cofinale dénombrable si et seulement si $B_\omega E$ est à base dénombrable.

4. - Si E est un e v r σ-complet (à fortiori s'il est complet) alors $B_\omega E$ est un ebc complet.

Si E est un e v r archimédien le cône des éléments positifs de E est Mackey-fermé dans $B_\omega E$ (cf. appendice).

Dans cet exposé <u>tous les espaces vectoriels réticulés considérés seront archimédiens</u> (sauf mention expresse du contraire).

Si E est un e v r le dual bornologique de $B_\omega E$ est l'e v r complet E^+.

Si E est un evr E^{ω} désignera la bande de E^{+} formée des formes linéaires f continues pour l'ordre c'est à dire vérifiant $x_{\lambda} \downarrow 0$ entraine $f(x_{\lambda}) \to 0$.

---o0o---

I - SUR LES BORNOLOGIES COMPLETES SOLIDES

A - Soit E un ebc complet réticulé solide ; il possède, d'une part une base de bornologie formée de disques solides, d'autre part une base formée de disques complétants. Il importe donc de savoir si E possède une base de bornologie formée de disques solides complétants.

Lemme - Soient E un ebc séparé réticulé solide et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de E telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ converge au sens de Mackey dans E. (cf. appendice). Si U est un élément de E tel que $|U| \leq |\sum_{n=1}^{\infty} U_n|$, alors il existe $(U'_n)_{n\geq 1}$ une suite de E telle que $|U'_n| \leq |U_n|$ et $U = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n$ au sens de Mackey dans E.

Preuve - Rappelons que si $x, y, z \in E$ tels que $|z| \leq |x+y|$ alors il existe $z_1, z_2 \in E$ tels que $z = z_1 + z_2$ et $|z_1| \leq |x|$, $|z_2| \leq |y|$. Notons $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} U_n$. Ainsi on voit qu'on peut aisément construire par récurrence une suite $(U'_n)_{n\geq 1}$ de E telle que $|U'_n| \leq |U_n|$ et pour tout entier $N \geq 1$

$$U = \sum_{k=1}^{N} U'_k + v_N \quad \text{où } |v_N| \leq |R_N|.$$

$(R_N)_{N\geq 1}$ converge vers 0 au sens de Mackey dans E, donc la suite $(v_N)_{N\geq 1}$ aussi ; par suite $U = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n$

<u>Proposition 1</u> - <u>Soit E un ebc complet réticulé solide. Alors E possède une base de bornologie formée de disques solides complétants.</u>

<u>Preuve</u> - Soit A un disque solide borné de E ; $\vee A$ est l'ensemble des sommes des série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ où $x_k \in A$ et $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \leq 1$.

On sait que $\vee A$ est un disque complétant borné de E et contenant A (cf. [6] chapitre IV). Soit $x \in \vee A$ et soit $y \in E$ tel que $|y| \leq |x|$. x s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ où $x_k \in A$ donc $|y| \leq |\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k|$. Donc en vertu du lemme précédent il existe $(y_k)_{k \geq 1}$ $y_k \in E$ telle que $y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y_k$ et $|y_k| \leq |x_k|$. Comme A est solide et que $x_k \in A$, on obtient $y_k \in A$. Donc $y \in \vee A$. Ainsi nous avons montré que $\vee A$ est solide.

<u>Remarque</u> : Un ebc complet réticulé solide est donc limite inductive bornologique d'espaces de Banach réticulés solides (Banach lattices). Un ebc réticulé qui est limite inductive bornologique (même dénombrable) d'espaces de Banach réticulés solides est certes un ebc complet, mais pas nécessairement un ebc solide (cf. [3]).

<u>Corollaire</u> - <u>Soit E un e.v.r. Les assertions suivantes sont équivalentes</u>

(i) $B_\omega E$ <u>est un ebc complet</u>

(ii) $B_\omega E$ <u>est un ebc Mackey-complet</u>

(iii) <u>Pour tout $x \in E$ $x \geq 0$ B_x est complétant</u>

(iv) <u>Toute suite positive Mackey-absolument sommable de E est Ω-sommable, c'est à dire sommable au sens de l'ordre.</u>

<u>Preuve</u> - Une suite Mackey-absolument sommable de E est une suite absolument sommable dans un espace normé E_{B_x} (normé par la jauge de B_x)

(ii) est équivalent à (iv) en vertu d'un résultat bien connu dans [9] chapitre III § 1 1-6.

(iii) entraine (i) et (i) entraine (ii) sont évidents.

Montrons que (ii) entraine (iii). Il nous suffit de montrer que $\vee B_x = B_x$ (cf. [6] chapitre IV). Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ $x_k \in B_x$ et soit $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \leq 1$. Pour tout entier $N \geq 1$

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k| \, |x_k| \leq x$$

Comme $B_\omega E$ est Mackey-complet la série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ converge. Par suite vu que le cône des éléments positifs de E est Mackey-fermé, on a $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \right| \leq x$. Donc $\vee B_x = B_x$ pour tout $x \in E$ $x \geq 0$.

B - La proposition suivante généralise et met en évidence la nature bornologique d'un résultat de Hugh Gordon [4]. Son intérêt apparaitra dans les corollaires qui suivront.

<u>Proposition 2 - Soient E un e v r, P étant le cône de ses éléments positifs, $\mathfrak{B}$ une bornologie convexe séparée solide sur E pour laquelle P est Mackey-complet. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de E convergeant vers 0 au sens de Mackey dans $(E, \mathfrak{B})$, alors il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ convergeant vers 0 au sens de Mackey dans l'ebc</u> $B_\omega E$.

<u>Preuve</u> - On peut écrire $x_n = y_n - z_n$ avec $y_n \geq 0$ $z_n \geq 0$, les suites $(y_n)_{n\geq 1}$ et $(z_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers 0 au sens de Mackey dans $(E, \mathfrak{B})$. On peut donc supposer que $x_n \geq 0$.

Nous nous inspirons de la démonstration de H. Gordon. Il existe un disque solide borné B de $(E, \mathcal{B})$ et $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ $\varepsilon_n \to 0$ tels que pour tout $n\geq 1$ $x_n \in \varepsilon_n B$; il existe alors $(n_k)_{k\geq 1}$ $n_k < n_{k+1}$ telle que pour tout $k \geq 1$ $\varepsilon_{n_k} \leq \frac{1}{4^k}$.

Posons $y_k = x_{n_k}$ et $z_k = \sum_{i=1}^{k} 2^i \; y_i$ pour tout $k \geq 1$. Soient p et q deux entiers $p < q$; on obtient en posant

$$\gamma_{p,q} = \sum_{i=p+1}^{q} 2^{-i}$$

$$z_p - z_q = \sum_{i=p+1}^{q} 2^i \; y_i = \sum_{i=p+1}^{q} \frac{1}{\gamma_{p,q}} \; 2^{-i} \; (\gamma_{p,q} \; 4^i \; y_i)$$

Mais $0 \leq 4^i \; y_i \leq \frac{1}{\varepsilon_{n_i}} \; x_{n_i}$; comme $\frac{1}{\varepsilon_{n_i}} \; x_{n_i} \in B$ et que B est solide, on obtient $4^i \; y_i \in B$; donc $\gamma_{p,q} \; 4^i \; y_i \in \gamma_{p,q} \, B$

$$\text{Or} \quad \sum_{i=p+1}^{q} \frac{1}{\gamma_{p,q}} \; 2^{-i} = 1$$

B étant convexe, on obtient $z_p - z_q \in \gamma_{p,q} \, B$ $(z_k)_{k \geq 1}$ est donc une suite positive de Mackey-Cauchy dans $(E, \mathcal{B})$. Par hypothèse il existe donc $z \in P$ tel que dans $(E, \mathcal{B})$: $z = \lim z_k$. Soit $P_k = \{x \in E \; ; \; x \geq 2^k \; y_k\}$ pour tout $k \geq 1$. Pour tout $k \geq 1$ et $p \geq k$ on a de façon évidente $z_p \in P_k$; P_k étant Mackey-fermé dans $(E, \mathcal{B})$ (c'est un translaté de P) on obtient ainsi $z \in P_k$ pour tout $k \geq 1$; c'est à dire $y_k \leq \frac{1}{2^k} \; z$ ou encore $0 \leq x_{n_k} \leq \frac{1}{2^k} \; z$ pour tout $k \geq 1$. Donc $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge vers 0 au sens de Mackey dans $B_\omega \, E$.

Corollaire 1 - Soit E un e.v.r. Si $\mathcal{B}$ est une bornologie convexe Mackey-complète solide sur E, alors on a les identités bornées suivantes

$$B_\omega E \underset{(1)}{\longrightarrow} (E, \mathcal{B}) \underset{(2)}{\longrightarrow} B\tau B_\omega E \underset{(3)}{\longrightarrow} B\,T\,B_\omega E$$

Preuve - $\mathcal{B}$ étant solide il nous suffit de montrer (2). Comme l'identité $B_\omega E \longrightarrow (E, \mathcal{B})$ est bornée, l'identité

$$B\tau B_\omega E \longrightarrow B\tau(E, \mathcal{B})$$

est bornée [10]. Soit A un borné de $B\tau(E,\mathcal{B})$; si A n'est pas un borné de $B\tau B_\omega E$, il existe un voisinage Ω de 0 de $\tau B_\omega E$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on ait $A \not\subset n\Omega$; il existe donc $(x_n)_{n\geq 1}$ $x_n \in A$ telle que $x_n \notin n\Omega$. Or A étant un borné de $B\tau(E,\mathcal{B})$ il existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que la suite $\left(\frac{1}{n_k} x_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ converge vers 0 au sens de Mackey dans $(E,\mathcal{B})$ [10]. Mais en vertu de la proposition 2 il existe une suite extraite $\left(\frac{1}{n_{k_p}} x_{n_{k_p}}\right)_{p\geq 1}$ qui converge vers 0 dans $B_\omega E$; donc à partir d'un certain rang p_o $\frac{1}{n_{k_p}} x_{n_{k_p}} \in \Omega$: contradictoire. Donc A est un borné de $B\tau B_\omega E$.

Par suite $B\tau(E,\mathcal{B}) = B\tau B_\omega E$, donc l'identité (2) est bornée.

Remarques - 1. En conséquence de la démonstration précédente on obtient l'égalité topologique $\tau B_\omega E = \tau(E,\mathcal{B})$

2. Si $B_\omega E$ est topologique, il n'existe au plus qu'une bornologie convexe complète solide sur E, à savoir la bornologie de l'ordre; ce qui permet de donner des exemples d'e v r E tel que $B_\omega E$ ne soit pas topologique : $B_\omega L^p$ (p réel ≥ 1), $B_\omega \mathcal{C}^o$.

3. La proposition 2 et son corollaire se généralisent au cas des <u>bornologies p-convexes</u> $(0 < p \leq 1)$; on remarque alors que pour tout réel $p > 0$ on a l'égalité topologique $\tau B_\omega\, L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu) = L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$, où X est un espace localement compact, μ une mesure de Radon positive sur X, $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ étant muni de sa structure d'espace de Banach usuelle si $p \geq 1$, de sa structure d' e v t métrisable complet si $0 < p < 1$.

4. La caractérisation des bornés de $B\, \tau B_\omega\, E$ [10] montre que <u>$B\, \tau B_\omega\, E$ est un ebc séparé solide.</u>

<u>Corollaire 2</u> - <u>Soit E un e v r. Si $\mathcal{B}$ est une bornologie convexe Mackey-complète solide sur E, alors toute bornologie convexe solide plus fine que $\mathcal{B}$ est aussi Mackey-complète ; en particulier la bornologie de l'ordre est complète</u>.

Preuve - Soit $\mathcal{B}'$ une bornologie convexe solide sur E, plus fine que $\mathcal{B}$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ $x_n \in E$ une suite de Mackey-Cauchy dans $(E, \mathcal{B}')$; $(x_n)_{n \geq 1}$ est donc de Mackey-Cauchy dans $(E, \mathcal{B})$, donc elle converge vers $x \in E$ au sens de Mackey dans $(E, \mathcal{B})$; en vertu de la proposition 2, on peut en extraire une suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge vers x au sens de Mackey dans $B_\omega\, E$; comme $\mathcal{B}'$ est solide, elle est moins fine que la bornologie de l'ordre, donc $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers x au sens de Mackey dans $(E, \mathcal{B}')$; vu que $(x_n)_{n \geq 1}$ est de Mackey-Cauchy dans $(E, \mathcal{B}')$, $(x_n)_{n \geq 1}$ converge donc vers x au sens de Mackey dans $(E, \mathcal{B}')$. Par suite $(E, \mathcal{B}')$ est un ebc Mackey-complet.

<u>Corollaire 3</u> - (application à la dualité) <u>Soient E un e v r et $\mathcal{B}$ une bornologie convexe solide t-séparée sur E. $E^\times$ est le dual bornologique de $(E, \mathcal{B})$</u>

<u>muni de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathcal{B}$. Alors on a les relations</u> :

$$B\ E^{\times} = B\ T\ B_{\omega}\ E^{\times} = B\ \tau\ B_{\omega}\ E^{\times}$$

<u>Preuve</u> - $E^{\times}$ est un idéal de E^{+} et un elcs complet localement solide ; $B\ E^{\times}$ est donc un ebc solide

1) complet, donc on a les identités bornées

$$B\ E^{\times} \longrightarrow B\ \tau\ B_{\omega}\ E^{\times} \longrightarrow B\ T\ B_{\omega}\ E^{\times}$$

2) topologique, donc on a l'identité bornée

$$B\ T\ B_{\omega}\ E^{\times} \longrightarrow B\ E^{\times}$$

d'où la conclusion.

<u>Remarque</u> - Soit E un e v r séparé par E^{+}; sur E^{+} on obtient les égalités bornologiques

$$B\ \tau\ B_{\omega}\ E^{+} = B\ T\ B_{\omega}\ E^{+} = B\ E^{+}_{\beta} = B(E^{+}, 0\ (E^{+}, E))$$

E^{+}_{β} étant le dual fort de $T\ B_{\omega}\ E$ vers x au sens de Mackey dans $(E, \mathcal{B})$. Par suite $(E, \mathcal{B}')$ est un ebc Mackey-Complet.

II - <u>SUR LA REFLEXIVITE D'UN ESPACE VECTORIEL RETICULE</u>

On peut définir différents types de réflexivité pour un espace vectoriel réticulé E séparé par E^{+} ou E^{ω}.

- la <u>réflexivité ordinale</u> ou <u>O-réflexivité</u>, à savoir $E = E^{++}$
- la <u>Ω-réflexivité</u>, à savoir $E = E^{\omega\omega}$
- la <u>b-réflexivité</u> ou réflexivité bornologique de $B_{\omega}\ E$.

Nous allons étudier les rapports entre ces trois types de réflexivité et caractériser les espaces vectoriels réticulés E tels que $B_\omega E$ soit réflexif.

Rappelons que si E est un e v r séparé par E^+, E est un sous e.v.r. de E^{++} ; la bande de E^{++} engendrée par E est $E^{+\omega}$. Si E est un e v r séparé par E^ω, E est un idéal de $E^{\omega\omega}$ et les bornés d'ordre de E sont $\sigma(E, E^\omega)$- compacts. [7].

Si E est un e v r séparé E^+, E^+ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $B_\omega E$, notée $0(E^+, E)$, est un elcs complet localement solide ; son dual noté $(E^+)'$ est un idéal de E^{++}, contenant E. Dans ces conditions on sait que $(E^+)'$ est l'idéal de E^{++} engendré par E.

<u>Proposition 3</u> - <u>Soit E un e v r séparé par E^+. Les assertions suivantes sont équivalentes</u>

(i) $B_\omega E$ <u>est réflexif</u>

(ii) <u>E est un e v r complet et $E^\omega = E^+$</u>

(iii) <u>E est un idéal de E^{++}</u>

<u>Preuve</u> - En vertu de la définition d'un ebc réflexif (cf. appendice) et des remarques précédentes, il est clair que (i) est équivalent à (iii).

Montrons que (ii) entraine (i). Comme E est complet les intervalles d'ordre sont $\sigma(E, E^\omega)$ - compacts en vertu des remarques précédentes (E^ω sépare E car $E^\omega = E^+$). Mais $E^\omega = E^+$, les intervalles d'ordre sont donc $\sigma(E, E^+)$ compact ce qui est équivalent à dire que $B_\omega E$ est réflexif [6].

Montrons que (i) entraine (ii) . Comme les intervalles d'ordre sont $\sigma(E, E^+)$-compacts, il résulte de [2] chapitre II exercice 14 que E est un e v r complet et que la Ω-convergence ou convergence au sens de l'ordre entraine la convergence topologique relativement à l'elcs $(E, \sigma(E, E^+))$; par suite une forme linéaire de E^+ est continue au sens de l'ordre, donc $E^\omega = E^+$.

Corollaire - Soit E un e v r séparé par E^ω. La O-réflexivité entraîne la réflexivité de $B_\omega E$ et la Ω-réflexivité. E est une bande de E^{++} si et seulement si $B_\omega E$ est réflexif et E est Ω-réflexif.

Preuve - Il est évident d'après ce qui précède que la O-réflexivité entraine la réflexivité de $B_\omega E$. Si E est O-réflexif, alors il est Ω-réflexif ; en effet puisque $B_\omega E$ est réflexif on a $E^+ = E^\omega$, donc $E^{\omega\omega} \subset E^{\omega +} = E^{++} = E$.

Supposons que $B_\omega E$ soit réflexif et E Ω-réflexif ; on a $E = E^{\omega\omega}$ or $E^+ = E^\omega$, donc $E = E^{+\omega}$: E est donc une bande de E^{++}. Supposons que E soit une bande de E^{++}, alors $E = E^{+\omega}$; mais $(E^+)' \subset E^{+\omega}$ donc $E = (E^+)'$ c'est à dire $B_\omega E$ est réflexif, donc $E^+ = E^\omega$ comme $E = E^{+\omega}$, on obtient $E = E^{\omega\omega}$, donc E est Ω-réflexif.

Remarques et exemples

1. $E = \mathcal{C}^o$ (espace des suites réelles convergeant vers zéro) $B_\omega \mathcal{C}^o$ est réflexif mais n'est pas Ω-réflexif, en effet $\mathcal{C}^{o\,\omega\omega} = \ell^\infty$ (espace des suites réelles bornées).

$E = \ell^\infty$; ℓ^∞ est Ω-réflexif ($\ell^{\infty\,\omega} = \ell^1$) mais $B_\omega \ell^\infty$ n'est pas réflexif

2. Si X est un espace localement compact et μ une mesure de Radon positive sur X, alors $B_\omega L^1_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ est réflexif (les intervalles d'ordre sont faiblement compacts).

Soit Λ un espace de suites réelles qui muni de l'ordre naturel est un e.v.r. complet et tel que $\Lambda^+ = \Lambda^\times$ où $\Lambda^\times$ est le dual de Kothe de Λ ; $B_\omega \Lambda$ est alors réflexif.

<u>Proposition 4</u> - <u>Soit E un e v r séparé par E^+. Les assertions suivantes sont équivalentes</u>

(i) <u>E est O-réflexif ($E = E^{++}$)</u>

(ii) <u>Il existe une bornologie solide $\mathcal{B}$ sur E^+ telle que $(E^+, \mathcal{B})^\times = E$.</u>

<u>Preuve</u> - (i) entraîne (ii) : en effet $E = (B_\omega E^+)^\times$ dans ce cas. (ii) entraîne (i); Notons $\mathcal{G}$ la topologie sur E de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathcal{B}$; $\mathcal{G}$ est localement solide car $\mathcal{B}$ est solide, donc l'identité $T\,B_\omega\, E \longrightarrow (E, \mathcal{G})$ est continue de même l'identité $(E, \mathcal{G}) \longrightarrow o(E, E^+)$; donc le dual topologique de $(E, \mathcal{G})$ est E^+ ; Notons $\mathcal{B}_o$ la bornologie équicontinue sur E^+ considéré comme dual de $(E, \mathcal{G})$. Comme $\mathcal{B}_o$ est compléte et solide, on obtient les identités bornées $B_\omega\, E^+ \longrightarrow (E^+, \mathcal{B}) \longrightarrow (E^+, \mathcal{B}_o) \longrightarrow B\,T\,B_\omega\, E^+$ par suite $(E^+, \mathcal{B})^\times = E^{++}$; d'où $E = E^{++}$.

III - <u>ESPACES DE SCHWARTZ RETICULES</u>

A - Rappels Un atome d'un e v r E est un élément a de E tel que pour tous b, c éléments de E tels que

$$a = b + c \qquad \text{et} \quad |b| \wedge |c| = 0$$

on ait $b = 0$ ou $c = 0$.

Un e v r complet E est dit atomique s'il est égal à la bande engendré par ses atomes. Une base atomique d'un e v r complet atomique E, notée $(a_i)_{i \in I}$, est une famille d'atomes de E telle que si i est distincts de j alors $a_i \wedge a_j = 0$ et tout atome de E est colinéaire à l'un des a_i. Un e v r complet atomique E possède au moins une base atomique, toutes ses bases atomique ont même cardinal, tout élément x de E peut s'écrire $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels et cela de manière unique, la famille $(\lambda_i a_i)_{i \in I}$ étant sommable au sens de l'ordre. Dans ces conditions $|x| = \sum_{i \in I} |\lambda_i| a_i$. Si H est une partie finie de I on note S_H l'application de E dans E définie par $S_H(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$. S_H est un opérateur réticulant de rang fini, continu pour toute topologie localement convexe localement solide séparée sur E. Les opérateurs S_H ne dépendent pas en fait de la base atomique choisie.

B - Dans cette partie nous allons énoncer des conditions nécessaires et suffisante pour que $B_\omega E$ soit un ebc de Schwartz ou un ebc Infra-Schwartz.

<u>Proposition 5</u> - <u>Soient E un e v r et $\mathcal{B}$ une bornologie Infra-Schwartz solide sur E. Alors la Ω-convergence ou convergence au sens de l'ordre dans E entraîne la M-convergence ou convergence au sens de Mackey dans $(E, \mathcal{B})$.</u>

<u>Preuve</u> - Soit $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un système filtrant décroissant vers 0. On peut supposer qu'il existe $\lambda_o \in \Lambda$ tel que pour tout λ de Λ on ait $o \leq x_\lambda \leq x_{\lambda_o}$.
$[-x_{\lambda_o}, x_{\lambda_o}] = B_{x_{\lambda_o}}$ étant borné dans $(E, \mathcal{B})$ il existe un disque borné solide A de $(E, \mathcal{B})$ tel que $B_{x_{\lambda_o}} \subset A$ et l'opérateur canonique $E_{B_{x_{\lambda_o}}} \longrightarrow E_A$ soit faiblement compact. $[o, x_{\lambda_o}]$ est fermé dans E_A qui est un espace normé solide, par suite vu que $[o, x_{\lambda_o}]$ est convexe, il est fermé pour la topologie faible $\sigma(E_A, (E_A)')$. Donc $[o, x_{\lambda_o}]$ est en fait faiblement compact dans E_A.

Posons $I_\lambda = [o, x_\lambda]$. $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une base de filtre sur le compact faible I_{λ_o} ; elle a donc un point adhérent a, qui appartient à tous les I_λ puisque I_λ est faiblement fermé dans E_A. donc $o \leq a \leq x_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc $a = 0$ car $\operatorname{Inf} x_\lambda = 0$. La base de filtre $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge donc vers 0 dans $(E_A, \sigma(E_A, (E_A)'))$, donc vers 0 dans l'espace normé E_A car une topologie faible est à cône normal et en vertu de [9] chapitre II § 3. Par suite $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge au sens de Mackey dans $(E, \mathcal{B})$.

Corollaire - Soit E un e v r tel que $B_\omega E$ soit Infra-Schwartz. Alors la Ω-convergence ou convergence au sens de l'ordre est équivalente à la M-convergence ou convergence au sens de Mackey dans $B_\omega E$.

Proposition 6 - Soit E un e v r. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $B_\omega E$ est un ebc de Schwartz

(ii) $B_\omega E$ est un ebc Infra-Schwartz

(iii) E est un e v r complet atomique tel que la Ω-convergence de $B_\omega E$.

Preuve - (i) entraine (ii) est évident ; Montrons que (ii) entraine (iii). Supposons tout d'abord que E soit séparé par E^+, ainsi $B_\omega E$ est réflexif [6] donc E est un e v r complet. Soit F la bande de E étrangère à la bande engendrée par les atomes de E, et supposons que $F \neq \{o\}$. Soit $x \in F$ $x > o$; il existe $y \in E$ $y > x$ tel que l'opérateur canonique $E_{B_x} \longrightarrow E_{B_y}$ soit faiblement compact. E_{B_y} étant un e v r avec unité, possède des formes linéaires réticulentes non nulles et l'ensemble des formes linéaires réticulantes sur E_{B_y} sépare E_{B_y} ; il en existe donc une, notée φ, telle que $\varphi_{|E_{B_x}} \neq o$ car $x \neq o$. $\varphi_{|E_{B_x}}$ est une forme linéaire réticulante non nulle sur E_{B_x} ; montrons qu'elle est complètement réticulante ; comme elle est réticulante il suffit de montrer que si $x_\lambda \downarrow o$ alors $\varphi(x_\lambda) \to o$. Soit donc $(x_\lambda)_{\lambda \in}$ un système filtrant décroissant vers o dans E_{B_x} ; la preuve de la proposition nous montre que $x_\lambda \to o$ dans l'espace de Banach E_{B_y}, par suite $\varphi(x_\lambda) \to o$ car φ est continue sur E_{B_y}. Par suite le noyau de $\varphi_{|E_{B_x}}$ est une bande de l'e v r complet E_{B_x}, maximale. La bande de E_{B_x} étrangère au noyau de $\varphi_{|E_{B_x}}$ est donc une bande engendrée par un atome non nul de E_{B_x} car $\varphi_{|E_{B_x}} \neq o$. E_{B_x} possède donc un atome non nul, qui est aussi un atome de E, car E_{B_x} est un idéal de E, : contradictoire avec la définition de F. Par suite $F = \{o\}$, c'est à dire E est atomique.

Si a priori E^+ ne sépare pas E on peut mettre en évidente l'ebc $B_\omega E$ comme limite inductive bornologique d'ebc E_i Infra-Schwartz à base dénombrable, les E_i étant des idéaux de l'e v r E, la bornologie de E_i étant la bornologie de l'ordre ; ainsi $B_\omega E_i$ sera - t - séparé c'est à dire E_i^+ sépare E_i. Donc E_i est un e v r complet atomique, et par suite E car algébriquement et ordinalement on aura $E = \varinjlim E_i$. La technique est la suivante : soit $x \in E$ $x \geq o$; il existe $(x_n)_{n\geq 1}$ $x_n \geq o$ tel que $x \leq x_1$ et $x_n \leq x_{n+1}$, les opérateurs canoniques de $E_{B_{x_n}}$ dans $E_{B_{x_{n+1}}}$ étant faiblement compact

$$E(x) = \bigcup_{n\geq 1} E_{B_{x_n}}$$

$E(x)$ est un idéal de E, et $B_\omega E(x)$ est un ebc Infra-Schwartz à base dénombrable.

Montrons que (iii) entraine (i) ; soit $(a_i)_{i\in I}$ une base atomique de E. L'hypothèse sur les convergences nous montre que pour tout $x \in E$ $x \geq o$ $x = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$ au sens de Mackey dans $B_\omega E$; il existe donc $y \in E$ $y \geq o$, qu'on peut supposer $\geq x$, tel que pour tout $\varepsilon > o$ il existe une partie finie H_o de I telle que pour toute partie fini $H \supset H_o$ on ait

$$o \leq x - S_H(x) \leq \varepsilon\, y$$

S_H est un opérateur continu positif de rang fini du Banach E_{B_x} dans le Banach E_{B_y} ; si π est l'opérateur canonique de E_{B_x} dans E_{B_y} on obtient pour tout $U \in B_x$ $|\pi(U) - S_H(U)| \leq \varepsilon\, y$ car vu que E est atomique $|U - S_H(U)| \leq x - S_H(x)$. Donc π est compact puisqu'il est limite uniforme d'opérateurs de rang fini. Par suite $B_\omega E$ est un ebc de Schwartz.

C - Le point de vue des espaces de familles.

Tout e v r complet atomique peut être représenté comme un idéal Λ de l'evr complet ω_I qui est l'espace des familles de nombres réels indexées par I, de plus Λ contenant φ_I qui est le sous-espace de ω_I constitué des familles presque toujours nulles. Nous allons interpréter la proposition 6 dans le cadre des espaces de famille et aussi obtenir un critère de "Schwartzité" analogue au critère de Grothendieck-Pietsch pour la nucléarité.

$\mathcal{C}^o_I$ est l'espace vectoriel réel des familles de nombres réels indexées par I convergeant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I. $\mathcal{C}^o_I$ est clairement un idéal de ω_I contenant φ_I.

Proposition 7 - Soit Λ un idéal de ω_I contenant φ_I ; les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $B_\omega \Lambda$ est un ebc de Schwartz.

(ii) Pour tout $x \in \Lambda$ $x \geq o$ il existe $y \in \Lambda$ $y \geq o$ et $a \in \mathcal{C}^o_I$ $a \geq o$ tels que $x = ay$ (c'est à dire $x_i = a_i y_i$ pour tout $i \in I$).

Preuve - (i) entraine (ii) Soit $x \in \Lambda$ $x \geq o$; comme $B_\omega \Lambda$ est de Schwartz on a $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ au sens de Mackey dans $B_\omega \Lambda$ ($e^i_j = \delta_{ij}$) . Il existe donc $y \in \Lambda$ $y \geq o$ tel que pour tout $\varepsilon > o$ il existe H partie finie de I telle que

$$o \leq \sum_{i \notin H} x_i e^i \leq \varepsilon y$$

donc pour $i \notin H$ $x_i e^i \leq \varepsilon y$, donc $x_i \leq \varepsilon y_i$; posons $a = (a_i)_{i \in I}$ avec $a_i = \dfrac{x_i}{y_i}$ et la convention $\dfrac{0}{0} = 0$. De ce fait $a \in \mathcal{C}^o_I$ et $x = ay$.

(ii) entraine (i) Λ est déjà un e v r complet atomique. Soit $(x^\alpha)_{\alpha \in A}$ $x^\alpha \in \Lambda$ $x^\alpha \downarrow o$. D'après la preuve de la proposition 6 partie (iii) entraine (i) on peut supposer que cond A = card I ; de ce fait on considère $(x^i)_{i \in I}$ $x^i \in \Lambda$ $x^i \downarrow o$; montrons que $x^i \to o$ au sens de Mackey dans $B_\omega \Lambda$; il en résultera que $B_\omega \Lambda$ sera un ebc de Schwartz à l'instar de la preuve de la proposition 6.

Nous pouvons supposer qu'il existe $i_o \in I$ tel que pour tout $i \in I$ on ait $o \leq x^i \leq x^{i_o}$. Par hypothèse il existe $y \in \Lambda$ $y \geq o$, $a \in \mathcal{C}^o_I$ $a \geq o$ tels que $x^{i_o} = a\, y$, donc pour tout $i \in I$ $o \leq x^i \leq a\, y$ donc pour tout $i \in I$ et $j \in J$ on obtient

$$o \leq x^i_j \leq a_j\, y_j$$

Soit $\varepsilon > o$; il existe H une partie finie de I telle que $o \leq a_j \leq \varepsilon$ pour tout $j \notin H$; donc pour tout $j \notin H$ et pour tout $i \in I$ on a $o \leq x^i_j \leq \varepsilon\, y_j$. Soit $y^H \in \omega_I$ défini ainsi

$$y^H_j = y_j \text{ si } j \notin H \quad \text{et} \quad y^H_j = o \text{ si } j \in H$$

on définit de même $(x^i)^H$; il est clair que $y^H \in \Lambda$ et pour tout $i \in H$ $(x^i)^H \leq \varepsilon\, y^H$ (1)

Mais $x^i \downarrow o$; il existe donc $i' \in I$ tel que pour tout $i \in I$ tel que $x^i \leq x^{i'}$ et pour tout $j \in H$ on ait

$$x^i_j \leq \varepsilon\, y_j$$

par suite pour tout i tel que $x^i \leq x^{i'}$ on a

$$x^i - (x^i)^H \leq \varepsilon\, (y - y^H) \qquad (2)$$

de (1) et (2) on obtient pour i tel que $x^i \leq x^{i'}$

$$x^i \leq \varepsilon\, y$$

c'est à dire $x_i \to o$ au sens de Mackey dans $B_\omega \Lambda$.

Exemples - $B_\omega \Lambda$ est un ebc de Schwartz si $\Lambda = \mathcal{C}^o_I$, $\Lambda = \ell^p_I$ $(p > o)$ (ℓ^p_I étant l'espace des familles de nombres réels $(x_i)_{i \in I}$ telles que $\sum_{i \in I} |x_i|^p < +\infty$),
$\Lambda = \{ (x_i)_{i \in I} \in \omega_I \ ; \ \{ i \in I \ ; x_i \neq o \}$ est dénombrable $\}$ en particulier $B_\omega\ \omega_{\mathbb{N}}$ est un ebc de Schwartz.

Remarque - Du critère topologique de Nucléarité de Grothendieck-Pietsch on peut en déduire un critère bornologique de Nucléarité qui s'énonce ainsi

Soit Λ un idéal de ω_I contenant φ_I ; les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $B_\omega \Lambda$ est nucléaire

(ii) Pour tout $x \in \Lambda$ $x \geq o$ il existe $y \in \Lambda$ $y \geq o$ et $a \in \ell^1_I$ $a \geq o$ tels que $x = ay$

---o0o---

APPENDICE

Pour la commodité du lecteur nous rappelons quelques éléments de bornologie. Pour de plus amples informations sur ce sujet on pourra se reporter à [6].

Etant donné un ensemble X , on appelle <u>bornologie</u> sur X toute famille $\mathcal{B}$ de parties de X , formant un recouvrement de X , héréditaire pour l'inclusion et stable par réunion finie. Un couple $(X, \mathcal{B})$ formé d'un ensemble et d'une bornologie est appelé <u>ensemble bornologique</u>. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés <u>bornés</u> de X . Une application d'un ensemble bornologique dans un autre est dite bornée si elle transforme un borné en un borné ; d'où la notion de bornologie plus fine (ou moins fine) qu'une autre.

Une base de $\mathcal{B}$ est une famille $(B_i)_{i \in I}$ de bornés telle que tout borné $B \in \mathcal{B}$ soit contenu dans l'un des B_i. $(X, \mathcal{B})$ est dit <u>à base dénombrable</u> si sa bornologie admet une base dénombrable.

Une bornologie sur un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite <u>convexe</u> si

(i) Si A et B sont bornés, alors $A + B$ est borné

(ii) Si A est borné et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λA est borné

(iii) Si A est borné, alors son enveloppe convexe aussi.

Un espace vectoriel muni d'une bornologie convexe est appelé <u>espace bornologique convexe</u> (e. b. c.).

Nous appellerons disque un convexe équilibré. Si A est un disque d'un espace vectoriel E, E_A est le sous-espace vectoriel de E engendré par A ; E_A peut être muni d'une semi-norme : la jauge de A.

Un ebc est <u>séparé</u> s'il n'admet aucune droite bornée. Un ebc est dit <u>complet</u> s'il possède une base de bornologie formée de disques complétants.

Un filtre Φ sur un ebc est dit <u>Mackey-convergent vers x (M-convergent)</u> s'il existe un borné A de E tel que $\{\lambda A ; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \{M-x ; M \in \Phi\}$. Cela revient à dire qu'il existe une base du filtre Φ qui est contenue dans un E_B et converge vers x dans E_B. On peut ainsi définir la notion de <u>suite de Cauchy au sens de Mackey</u> dans un ebc. Un ebc est dit <u>Mackey-complet</u> s'il est séparé et si toute suite de Cauchy au sens de Mackey est convergente au sens de Mackey ; Un ebc complet est Mackey-complet, la réciproque est fausse en général.

Une partie X d'un ebc E est <u>Mackey-fermé (ou M-fermée)</u> si toute suite de X Mackey-convergente à sa limite dans X. L'ensemble des parties Mackey-fermé d'un ebc est l'ensemble des parties fermées pour une topologie sur E non nécessairement vectorielle ; muni de cette topologie E est noté τE.

L'ensemble des disques bornivores d'un ebc E est une base de voisinage de 0 pour une topologie localement convexe sur E ; muni de cette topologie E est noté TE ; l'identité $\tau E \to TE$ est continue.

Si E est un elcs ; l'ensemble des parties bornées de E est une bornologie convexe sur E, <u>appelé bornologie de Von Neumann de E</u> ; muni de cette bornologie E est noté BE.

Si E est un ebc séparé l'ensemble des parties de E absorbées par tout voisinage de 0 de τE est aussi une bornologie convexe sur E ;

muni de cette bornologie E est noté $B\tau E$; Les identités $E \to B\tau E \to BTE$ sont bornées.

L'ensemble des formes linéaires bornées sur un ebc E est un espace vectoriel noté $E^{\times}$ appelé <u>le dual bornologique de E</u> ; E est dit <u>t-séparé</u> si $E^{\times}$ sépare E. $E^{\times}$ peut être muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E ; Un ebc t-séparé E est dit <u>réflexif</u> si $E = (E^{\times})'$.

Un ebc est dit <u>Infra-Schwartz</u> (resp. <u>de Schwartz</u>, resp. <u>Nucléaire</u>) si pour tout disque borné A il existe un disque borné complétant B tel que $A \subset B$ et l'injection canonique $E_A \to E_B$ soit faiblement compacte (resp. compacte, resp. nucléaire).

Un ebc Infra-Schwartz à base dénombrable est toujours t-séparé.

Un ebc et e v r E est dit <u>solide</u> s'il admet une base de bornologie formée de disques solides. L'identité $B_{\omega} E \to E$ est alors bornée et $E^{\times}$ est un idéal de E^{+}. Pour de plus amples informations sur les bornologies solides on pourra se reporter à [1] par exemple.

---o0o---

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. T. AKKAR - Thèse 3e cycle (Bordeaux 1970).

[2] N. BOURBAKI - Intégration chapitre I, II, III et IV.

[3] J.F. COLOMBEAU - M. GRANGE - B. PERROT - Sur la complétion des espaces vectoriels bornologiques polaires C.R.A.S. tome 274 (1972).

[4] H. GORDON - Relative Uniform convergence ; Math. Annalen 153 (1964).

[5] M. GRANGE - Thèse 3e cycle (Bordeaux 1972).

[6] H. HOGBE-NLEND - Théorie des Bornologies et applications Springer, Lectures Notes 213 (1971).

[7] S. KAPLAN - The second dual of the space of continuons functions II Trans. of A.M.S. Vol 93 (1959).

[8] KOMURA and KOSHI - Nuclear Vector Lattices Math. Annalen 163 (1966).

[9] A.L. PERESSINI - Oratered topological Vector Spaces. Harper's Séries.

[10] B. PERROT - Thèse de 3e cycle (Bordeaux 1970).

---o0o---

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE (France)