

PIERRE DAZORD

Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 3
, p. 1-19

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_3_1_0

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES SUR LA CLASSE DE MASLOV-ARNOLD

par Pierre DAZORD

Dans un article précédent ⁽¹⁾, une construction géométrique de la classe de Maslov-Arnold a été donnée utilisant la notion introduite à ce propos, de cocycle sur un fibré (non nécessairement localement trivial). Cette question est ici reprise en tenant compte des travaux du Séminaire d'Orsay (1975-1976) sur le fibré cotangent et notamment des exposés de Demazure ⁽²⁾ et Douady ⁽³⁾.

Les résultats antérieurs sur la cohomologie non abélienne d'un fibré ⁽¹⁾ sont brièvement rappelés et améliorés. La notion de G -diviseur relativement à un fibré est introduite. Si $G = \mathbb{Z}$ ces diviseurs sont des diviseurs topologiques de la base du fibré au sens de (2) et (3). L'ensemble des diviseurs relativement à un fibré est relié à sa cohomologie non abélienne.

Pour tout fibré symplectique (E, σ) de base X et tout couple L, L' de sous-fibrés lagrangiens de E on pose $\mathcal{L}_{k, k'}(E) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{L}_{k, k'}(E)_x$, où $\mathcal{L}_{k, k'}(E)_x$ est l'ensemble des lagrangiens de la fibre en x de E, E_x , qui coupent L_x (resp. L'_x) suivant un sous-espace de dimension k (resp. k'). Pour certains couples (k, k') , $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$ est un fibré que l'on peut munir, en utilisant les résultats de (2), d'un \mathbb{Z} -cocycle $\sigma_{k, k'}$. En particulier $\mathcal{L}_{0, 0}(E)$, noté $\mathcal{L}(E)$, est un fibré et $\sigma_{0, 0}$, noté σ , est le cocycle de Hörmander. Les \mathbb{Z} -fibrés principaux $\mathcal{L}_{k, k'}(E)(\sigma_{k, k'})$ sont isomorphes. Leur classe est la classe de Maslov-Arnold. De la construction effectuée, se déduisent aisément les propriétés de la classe de Maslov-Arnold en utilisant les techniques introduites au début de l'article. On retrouve ainsi des résultats de (2).

Enfin, à l'aide de la notion de la notion de \mathbb{Z} -diviseurs relativement fibrés $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$, on définit les diviseurs de Maslov et on prouve que cette définition coïncide avec celle de (2).

1. Cohomologie non abélienne d'un fibré ⁽¹⁾

DEFINITION 1.1. - Un fibré est un triple (p, F, X) , noté F par abus de notation, formé de deux espaces topologiques F et X d'une surjection continue p de F sur X , localement sectionnable, i.e. pour tout x de X il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une section s_U de p au-dessus de U .

Quand les espaces fibrés rencontrés seront localement triviaux, cela sera explicitement spécifié. La restriction, au-dessus d'une partie U de X , du fibré F sera notée F_U . En particulier la fibre en x sera notée F_x . Un morphisme de fibrés est une application continue compatible avec les projections.

G désignant un groupe topologique, le plus souvent muni de la topologie discrète dans les applications, $\mathcal{C}^q(F, G)$ est l'ensemble des applications continues, à valeurs dans G , du produit fibré $\square_{q+1} F$ de $F(q+1)$ fois par lui-même. Pour $q=0,1$, on définit une opération cobord ∂ et donc des 0 et 1-cocycles et des 1-cobords :

$$\partial: \mathcal{C}^0(F, G) \longrightarrow \mathcal{C}^1(F, G)$$

$$\gamma_0 \rightarrow \partial\gamma_0: (z, z') \rightarrow \gamma_0(z)(\gamma_0(z'))^{-1} ,$$

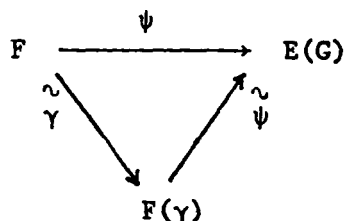
$$\partial: \mathcal{C}^1(F, G) \longrightarrow \mathcal{C}^2(F, G)$$

$$\gamma_1 \rightarrow \partial\gamma_1: (z, z', z'') \rightarrow \gamma_1(z, z')\gamma_1(z', z'')(\gamma_1(z, z''))^{-1} .$$

$H^1(F, G)$, premier ensemble de cohomologie non abélienne de F à coefficients dans G , est par définition l'ensemble quotient des 1-cocycles par les 1-cobords, pointé par $\partial\mathcal{C}^0(F, G)$. On note systématiquement 0 dans la suite le point des ensembles pointés.

Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold

A tout 1-cocycle γ sur F à valeurs dans G , on associe l'espace fibré principal localement trivial de groupe G , $F(\gamma)$, quotient de $F \times G$ par la relation d'équivalence $(z, g) \sim (z', g')$ si $pz = pz'$ et $g' = \gamma(z', z)g$ et le morphisme $\tilde{\gamma}$ de F dans $F(\gamma)$ qui à z dans F associe la classe $\tilde{\gamma}(z)$ de (z, e) dans $F \times G$ où e est l'élément neutre de G . $\tilde{\gamma}$ joue un rôle universel au sens suivant : pour tout G -fibré principal $E(G)$ et tout morphisme ψ de F dans $E(G)$ tel que $\psi(z) = \psi(z')\gamma(z', z)$ si $pz' = pz$, ψ se factorise à travers $F(\gamma)$.



de façon que $\tilde{\psi}$ soit un isomorphisme de G -fibrés principaux.

Compte tenu de ce qui précède on prouve le théorème suivant qui améliore un résultat de (1) :

THEOREME 1.1. - *Il existe une application canonique h d'ensembles pointés de $H^1(F, G)$ dans $H^1(X, G)$ premier ensemble de cohomologie non abélienne de X à coefficients dans G pointé par la classe des fibrés triviaux, dont le noyau est réduit à 0.*

h se déduit par passage au quotient de l'application $\gamma \rightarrow F(\gamma)$.

Soit F_1 un sous-fibré de F . Tout 1-cocycle sur F , γ à valeurs dans G définit par restriction à $\overset{2}{\boxtimes} F_1$ un 1-cocycle sur F_1 à valeurs dans G , γ_1 . Cette opération de restriction, par passage au quotient, définit un morphisme d'ensembles pointés $H_{F_1 F}$ de $H^1(F, G)$ dans $H^1(F_1, G)$, et les fibrés $F(\gamma)$ et $F_1(\gamma_1)$ sont isomorphes.

PROPOSITION 1.1. - *Dans la catégorie des ensembles pointés, le diagramme suivant est commutatif :*

Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(F, G) & \longrightarrow & H^1(X, G) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & H_{F, F} & \\
 & & H^1(F_1, G)
 \end{array}$$

De plus le noyau de $H_{F_1 F}$ est réduit à 0.

Soit $H^1(X, G; F)$ l'image de $H^1(F, G)$ dans $H^1(X, G)$.

COROLLAIRE 1. - $H^1(X, G; F)$ est un sous-ensemble pointé de $H^1(X, G, F_1)$ si F_1 est un sous-fibré de F .

Si F possède une section globale continue s , $s(X)$ est un sous-fibré de F dont la fibre est réduite à un point. Donc $H^1(s(X), G)$ est réduit à 0. Il en résulte :

COROLLAIRE 2. - Si le fibré F possède une section globale continue, $H^1(F, G)$ est réduit à 0.

REMARQUE. - $H^1(F, G) \neq 0$ est donc obstruction à l'existence d'une section globale continue du fibré F au dessus de X .

Si G est abélien $H^1(F, G)$ est le groupe quotient par le sous-groupe des 1-cobords du groupe des 1-cocycles. Le théorème 1.1. implique que h est un homomorphisme injectif de groupes abéliens. On peut donc identifier $H^1(F, G)$ à un sous-groupe de $H^1(X, G)$.

PROPOSITION 1.2. - Si G est abélien, $H^1(F, G)$ s'identifie à un sous-groupe de $H^1(X, G)$. Si F_1 est un sous-fibré de F on a les inclusions de groupes abéliens : $H^1(F, G) \subset H^1(F_1, G) \subset H^1(X, G)$.

Si de plus G est munie de la topologie discrète, $H^1(X, G)$ est le premier groupe de cohomologie de Čech de X à coefficients dans G .

2. Diviseurs relativement à un fibré

Soit γ un 1-cocycle à valeurs dans G . Les sections quelconques (resp. continues) de $F(\gamma)$ sont en correspondance biunivoque avec les applications quelconques (resp. continues) d de F dans G telles que $d(z) = \gamma(z, z')d(z')$. Réciproquement soit $d: F \rightarrow G$ une application, non nécessairement continue, telle que $\hat{d}: \overset{2}{\boxtimes} F \rightarrow G$ définie par $\hat{d}(z, z') = d(z) \cdot (d(z'))^{-1}$ soit continue. \hat{d} est un 1-cocycle sur F à valeurs dans G . On peut donc associer à d le fibré principal $F(\hat{d})$ et une section, non nécessairement continue, de $F(\hat{d})$. Il est donc naturel d'appeler G -diviseur de X relativement à F toute application $d: F \rightarrow G$ telle que $\hat{d}: \overset{2}{\boxtimes} F \rightarrow G: (z, z') \rightarrow \hat{d}(z, z') = d(z)(d(z'))^{-1}$ soit continue. Soit $\mathcal{D}(F, G)$ l'ensemble des G -diviseurs de X relativement à F . Si d est un G -diviseur, comme \hat{d} est continue et p localement sectionnable, l'ensemble des points de continuité de d est de la forme $p^{-1}A$ avec $A \subset X$. $X - A$ s'appelle le support de d . Si G est muni de la topologie discrète, $X - A$ est fermé. Dans ce cas le support de d est le plus petit fermé B de X tel que la restriction de d à $p^{-1}(X-B)$ soit continue et d définit un diviseur topologique au sens de (2) et (3).

REMARQUE. - Soit γ un 1-cocycle sur F à valeurs dans G et s une section - non nécessairement continue - de F . L'application définie sur F par $z \rightarrow S(z) = \gamma(z, s(pz))$ est un diviseur relativement à F et $\hat{s} = \gamma$. Réciproquement soit d un diviseur relativement à F tel que pour tout x de X , $d^{-1}(e) \cap F_x \neq \emptyset$. On peut construire une application s , en général non continue, de X dans F telle que $s(x)$ appartienne à $d^{-1}(e) \cap F_x$. Soit \hat{d} le 1-cocycle associé à d . Alors $d = d(z, s(pz))$.

Soit $\mathcal{F}(X, G)$ l'ensemble des applications, non nécessairement continues, de X dans G . $\mathcal{F}(X, G)$ est un groupe qui opère à droite dans $\mathcal{D}(F, G)$: Si d est un diviseur et φ une application de X dans G , on désigne par $d \cdot \varphi$ le diviseur $z \rightarrow d(z) \cdot \varphi(p(z))$. On a évidemment $\widehat{d \cdot \varphi} = \hat{d}$.

$\mathcal{C}^0(F, G)$ opère à gauche dans $\mathcal{D}(F, G)$: si d est un diviseur et c

Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold

une 0-cochaîne, on désigne par $c.d$ le diviseur $z \rightarrow c(z).d(z)$. Les cocycles $\widehat{c.d}$ et \widehat{d} sont équivalents et définissent donc le même élément de $H^1(F,G)$.

$\mathcal{D}(F,G)$ est pointé par le diviseur $z \rightarrow e$. On définit un morphisme d'ensembles pointés $\mathcal{D} : \mathcal{D}(F,G) \rightarrow H^1(F,G)$. $\mathcal{D}d$ est la classe du cocycle \widehat{d} . En faisant opérer trivialement $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$ dans $H^1(F,G)$, \mathcal{D} devient un morphisme d'ensembles pointés munis des groupes d'opérateurs $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$.

Soit $\widetilde{\mathcal{C}}^0(F,G)$ l'orbite de $\mathcal{C}^0(F,G)$ dans $\mathcal{D}(F,G)$ par l'action du groupe $\mathcal{F}(X,G)$, pointée par la 0-cochaîne $z \rightarrow e$. $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$ opèrent naturellement l'un à droite et l'autre à gauche dans $\widetilde{\mathcal{C}}^0(F,G)$ et l'inclusion $i : \widetilde{\mathcal{C}}^0(F,G) \rightarrow \mathcal{D}(F,G)$ est un morphisme d'ensembles pointés munis des groupes d'opérateurs $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$.

THEOREME 2.1. - On a une suite exacte d'ensembles pointés munis des groupes d'opérateurs $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F,G)$:

$$0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}^0(F,G) \rightarrow \mathcal{D}(F,G) \rightarrow H^1(F,G) \rightarrow 0$$

DEMONSTRATION.

(i) \mathcal{D} est surjective. Soit $a \in H^1(F,G)$. Il existe un cocycle γ dont a est la classe de cohomologie. Soit $s : X \rightarrow F$ une section quelconque de F et $z \rightarrow d(z)$ l'application définie par $d(z) = \gamma(z, s(pz))$. d est un diviseur et $\widehat{d} = \gamma$. Donc \mathcal{D} est surjective.

(ii) $\mathcal{D}_0 i = 0$. Soit $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{C}}^0(F,G)$. Il existe donc une 0-cochaîne f et $\varphi : X \rightarrow G$ telles que $\widetilde{f} = f.\varphi$. Les cocycles associés à \widetilde{f} et f coïncident, or celui associé à f est un cobord et donc $\mathcal{D}_0 i = 0$.

(iii) $\text{Im } i = \mathcal{N}(\mathcal{D})$ (où $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ désigne le noyau de \mathcal{D}). Soit d dans le noyau de \mathcal{D} ; \widehat{d} est un cobord. Il existe donc une 0-cochaîne c telle que $\widehat{d} = \partial c$ ce qui implique que $c(z)^{-1} d(z)$ ne dépend que de pz . Soit $\varphi : X \rightarrow G$ définie par $\varphi(p(z)) = c(z)^{-1} d(z)$. $d = c.\varphi$ et donc $d \in \text{Im } i$.
C..Q.F.D.

Soit $\mathcal{D}' = h_0 \mathcal{D}$. $\mathcal{D}' : \mathcal{D}(F,G) \rightarrow H^1(X,G;F)$. Le corollaire suivant

résulte immédiatement du théorème précédent et du théorème 1.1.

COROLLAIRE 1. - On a une suite exacte d'ensembles pointés à groupes d'opérateurs $\mathcal{F}(X,G)$ et $\mathcal{C}^0(F;G)$:

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^0(F,G) \rightarrow \mathcal{D}(F,G) \rightarrow H^1(X,G;F) \rightarrow 0$$

Les groupes opèrent trivialement dans $H^1(X,G;F)$. Si G est abélien, $H^1(F,G)$ et $H^1(X,G;F)$ sont deux groupes abéliens isomorphes.

COROLLAIRE 2. - Si G est abélien, on a une suite exacte de groupes abéliens à groupes d'opérateurs $\mathcal{F}(X,G)$ et $\tilde{\mathcal{C}}^0(F,G)$:

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^0(F,G) \rightarrow \mathcal{D}(F,G) \rightarrow H^1(F,G) \rightarrow 0.$$

3. Cartes symplectiques d'un fibré symplectique.

$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ muni de la forme symplectique canonique σ_0 est un espace vectoriel symplectique. $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ s'identifie naturellement à \mathbb{C}^n . Pour tout espace topologique $(U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U, \sigma_0)$ est un fibré symplectique trivial de rang (réel) $2n$.

DEFINITION 3.1. - Soit $(E \rightarrow X, \sigma)$ un fibré symplectique de rang $2n$. Une carte symplectique de E est un couple (U, χ_U) formé d'un ouvert U de X et d'une application χ_U qui est un isomorphisme du fibré symplectique $(E_U \rightarrow U, \sigma)$ sur le fibré symplectique trivial $(U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U, \sigma_0)$.

PROPOSITION 3.1. - Si $(E \rightarrow X, \sigma)$ est un fibré symplectique de rang $2n$ et L un sous-fibré lagrangien de E , il existe une famille (U, χ_U) de cartes symplectiques de E , dont les domaines recouvrent X et telles que $\chi_U(L) = \mathbb{R}^{n*}$. De telles cartes symplectiques sont dites adaptées à L .

Par abus de notation, on note encore χ_U la composée de χ_U avec la

projection de $U \times \mathbb{C}^n$ sur \mathbb{C}^n .

REMARQUE. - Grâce à cette proposition les démonstrations concernant des propriétés locales sont ramenées à des démonstrations dans l'espace vectoriel symplectique (\mathbb{C}^n, σ_0) .

DEMONSTRATION. - D'après (3) on peut construire un sous-fibré lagrangien \hat{L} tel que en tout point x , \hat{L}_x soit transverse à L_x (Par exemple, on munit E d'une structure complexe adaptée à σ (3) et on prend $\hat{L} = iL$).

\hat{L} étant un sous-fibré, il existe un recouvrement (U) de X formé d'ouverts trivialisant \hat{L} . Soit (e_i) ($i=1,2,\dots,n$) n sections continues à \hat{L} au dessus de U formant une base de \hat{L}_x pour tout x dans U , et soit β_x la forme quadratique définie sur \hat{L}_x ($x \in U$) par $\beta_x(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Il existe sur E_U , une structure complexe unique dépendant continûment de x (3) telle que pour tout x de U $i\hat{L}_x = L_x$ et que la restriction à \hat{L}_x de la forme hermitienne η_x de partie imaginaire σ_x soit β_x . η est donné par

$$\eta(X, Y) = \sigma(iX, Y) + i\sigma(X, Y)$$

Il en résulte que $\sigma(ie_k, e_j) = \delta_{kj}$. Soit $\chi_U: E_U \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'application qui à X dans E_U associe ses coordonnées (ξ^j, ξ^{j*}) dans la base (e_j, ie_j) . $\sigma(ie_k, e_j) = \delta_{kj}$ entraîne que $\sigma(X, Y) = \sigma_0(\chi_U X, \chi_U Y)$.

χ_U est donc une carte symplectique et $\chi_U(L) = \mathbb{R}^{n*}$. C.Q.F.D.

4. Classe de Maslov-Arnold.

Soit $(p: E \rightarrow X, \sigma)$ un espace fibré vectoriel localement trivial de rang fini, symplectique, noté par la suite E . σ est la 2-forme symplectique.

$\tilde{\mathcal{L}}(E)_x$ est l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de E_x fibré en x de E . On pose $\tilde{\mathcal{L}}(E) = \bigcup_{x \in X} \tilde{\mathcal{L}}(E)_x$. $\tilde{\mathcal{L}}(E) \rightarrow X$, dont la projection est également notée p , est un fibré au sens du paragraphe 1.

Soit (L, L') deux sous fibrés lagrangiens de E . Pour tout couple (k, k') d'entiers naturels, $\mathcal{L}_{k, k'}(E)_x$ désigne le sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{L}}(E)_x$ formé des lagrangiens M coupant L_x (resp. L'_x) suivant un sous-espace de dimension k (resp. k'). On pose $\mathcal{L}_{k, k'}(E) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{L}_{k, k'}(E)_x$. $\mathcal{L}_{k, k'}(E) \rightarrow X$ n'est un fibré (sous fibré de $\tilde{\mathcal{L}}(E)$) au sens du paragraphe 1 que pour certains couples (k, k') auxquels on se restreint dorénavant. $\mathcal{L}_{0, 0}(E) \rightarrow X$, noté par la suite $\mathcal{L}(E) \rightarrow X$, est toujours un fibré.

Suivant (2) on associe à tout triple (μ, μ', μ'') de lagrangiens de E_x un entier relatif $s(\mu, \mu', \mu'')$ qui est la signature de la forme bilinéaire symétrique $B_{\mu\mu'\mu''}$ définie, sur le sous-espace vectoriel de $\mu \times \mu' \times \mu''$ formé des triples (ξ, ξ', ξ'') tels que dans E_x $\xi + \xi' + \xi'' = 0$, par

$$B_{\mu\mu'\mu''} [(\xi, \xi', \xi''), (\eta, \eta', \eta'')] = \sigma(\xi, \eta').$$

Si μ' est transverse à μ et μ'' $s(\mu, \mu', \mu'')$ sera noté $s^{\mu'}(\mu, \mu'')$. C'est alors (cf (1) ou (2)) la signature d'une forme quadratique sur μ de noyau $\mu \cap \mu''$.

Soit Σ l'application définie sur $\boxtimes^2 \mathcal{L}(E)$ par la formule suivante : si μ_1 et μ_2 sont deux lagrangiens de E_x ,

$$\begin{aligned} \Sigma(\mu_1, \mu_2) = & \frac{1}{2} \{ s(L_x, \mu_1, L'_x) - s(L_x, \mu_2, L'_x) \\ & + \dim(L_x \cap \mu_1) - \dim(L'_x \cap \mu_1) \\ & - \dim(L_x \cap \mu_2) + \dim(L'_x \cap \mu_2) \} ; \end{aligned}$$

Σ est à valeurs dans \mathbb{Z} (2).

Σ vérifie la relation suivante : si $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ sont trois lagrangiens de E_x ,

$$\Sigma(\mu_1, \mu_2) + \Sigma(\mu_2, \mu_3) - \Sigma(\mu_1, \mu_3) = 0.$$

Σ n'est pas continue en général. Cependant :

PROPOSITION 4.1. - La restriction de Σ à $\mathcal{L}_{k_1, k'_1}(E) \boxtimes \mathcal{L}_{k_2, k'_2}(E)$ est continue.

DEMONSTRATION. - Soit $\mu_1 \in \mathcal{L}_{k_1, k'_1}(E)_X$ et $\mu_2 \in \mathcal{L}_{k_2, k'_2}(E)_X$, soit N un lagrangien de E_X transverse simultanément à μ_1, μ_2, L_X et L'_X . Un calcul utilisant les formules de (2) permet d'écrire :

$$\Sigma(\mu_1, \mu_2) = -\frac{1}{2}\{s^N(L_X, \mu_1) + s^N(\mu_1, L'_X) - s^N(L_X, \mu_2) - s^N(\mu_2, L'_X) + k_1 - k'_1 - k_2 + k'_2\}.$$

Comme $s^N(A, B)$ est continue sur le sous-espace où $\dim A \cap B$ est constante, Σ est continue sur $\mathcal{L}_{k_1, k'_1}(E) \boxtimes \mathcal{L}_{k_2, k'_2}(E)$ compte tenu de la proposition 3.1. et de la remarque qui la suit.

COROLLAIRE. - Pour tout couple (k, k') d'entiers naturels tels que $\mathcal{L}_{k, k'}(E) \rightarrow X$ soit un fibré, Σ définit un 1-cocycle entier sur $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$, noté $\sigma_{k, k'}$. Si μ_1 et μ_2 appartiennent à $\mathcal{L}_{k, k'}(E)_X$

$$\sigma_{k, k'}(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2}(s(L, \mu_1, L') - s(L, \mu_2, L')).$$

si $k = 0 = k'$ σ_{00} , noté σ , est le cocycle de Hörmander.

Ce corollaire permet de construire sur X les \mathbb{Z} -fibrés principaux localement triviaux $\mathcal{L}_{k, k'}(E)(\sigma_{k, k'})$. On notera $\mathcal{M}_{LL'}$ le fibré $\mathcal{L}(E)(\sigma)$.

PROPOSITION 4.2. - $\mathcal{L}_{k, k'}(E)(\sigma_{k, k'})$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{M}_{LL'}$.

Grâce à cette proposition on identifiera par la suite, $\mathcal{L}_{k, k'}(E)(\sigma_{k, k'})$ à $\mathcal{M}_{LL'}$.

DEMONSTRATION. - Σ définit dans $\mathcal{L}(E) \times \mathbb{Z}$ une relation d'équi-

valence notée (Σ) :

$$(\mu, g) \stackrel{(\Sigma)}{\sim} (\mu', g') \text{ ssi } p(\mu) = p(\mu') \text{ et } g' = \Sigma(\mu', \mu) + g.$$

(Σ) induit sur $\mathcal{L}_{k, k'}(E) \times \mathbb{Z}$ la relation d'équivalence associée au cocycle $\sigma_{k, k'}$. $\mathcal{L}_{k, k'}(E)(\sigma_{k, k'})$ est donc isomorphe en tant qu'ensemble fibré à $\mathcal{L}(E) \times \mathbb{Z} / (\Sigma)$. Pour tout couple $\{(k_1, k'_1), (k_2, k'_2)\}$ il existe donc une bijection, compatible avec les projections, de $\mathcal{L}_{k_1, k'_1}(E)(\sigma_{k_1, k'_1})$ sur $\mathcal{L}_{k_2, k'_2}(E)(\sigma_{k_2, k'_2})$. Pour prouver que cette bijection est continue, on considère une section continue de $\mathcal{L}_{k_2, k'_2}(E)$ au dessus d'un ouvert U de X , notée μ_2 , et l'application de $(\mathcal{L}_{k_1, k'_1}(E) \cap p^{-1}U) \times \mathbb{Z}$ dans $\mathcal{L}_{k_2, k'_2}(E) \times \mathbb{Z}$ définie par

$$(\mu, g) \rightarrow (\mu_2(p(\mu)), \Sigma(\mu_2(p(\mu)), \mu) + g).$$

Il résulte de la proposition 4.1. que cette application est continue. Or elle est compatible avec les relations d'équivalence définies par σ_{k_1, k'_1} et σ_{k_2, k'_2} respectivement et définit par passage au quotient la restriction de la bijection de $\mathcal{L}_{k_1, k'_1}(E)(\sigma_{k_1, k'_1})$ sur $\mathcal{L}_{k_2, k'_2}(E)(\sigma_{k_2, k'_2})$ au dessus de U . La continuité est donc établie et la bicontinuité s'obtient en échangeant les rôles de (k_1, k'_1) et (k_2, k'_2) . $\mathcal{L}_{k_1, k'_1}(E)(\sigma_{k_1, k'_1})$ est donc canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}_{k_2, k'_2}(E)(\sigma_{k_2, k'_2})$. C.Q.F.D.

Soit $\tilde{\Sigma}$ l'application définie sur $\tilde{\mathcal{L}}(E)$ qui associe à $\mu \in \tilde{\mathcal{L}}(E)$ la classe d'équivalence de $(\mu, 0)$ relativement à (Σ) . $\tilde{\Sigma} : \tilde{\mathcal{L}}(E) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(E) \times \mathbb{Z} / (\Sigma)$ est compatible avec les projections. Comme en tant qu'ensemble $\tilde{\mathcal{L}}(E) \times \mathbb{Z} / (\Sigma)$ s'identifie à $\mathcal{M}_{LL'}$, on a prouvé :

THEOREME 4.1. (2) - $\tilde{\Sigma} : \tilde{\mathcal{L}}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{LL'}$ est une application (non continue en général), compatible avec les projections, telle que $\Sigma(\mu_1) = \Sigma(\mu_2) + \Sigma(\mu_2, \mu_1)$ si $p(\mu_1) = p(\mu_2)$. La restriction

Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold

de $\tilde{\Sigma}$ à $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ est le morphisme (continu) d'espaces fibrés de $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ dans $\mathcal{M}_{L,L'}$: $\sigma_{k,k'}$, associé au sens du paragraphe 1 au cocycle $\sigma_{k,k'}$.

DEFINITION 4.1. - La classe d'isomorphisme de $\mathcal{M}_{L,L'}$, comme \mathbb{Z} -fibré principal s'appelle la classe de Maslov-Arnold de L et L' et se note $K(L,L')$.

Compte tenu de la proposition 1.2, $K(L,L')$ appartient pour tout couple convenable d'entiers (k,k') au sous-groupe de $H^1(X, \mathbb{Z}) : H^1(\mathcal{L}_{k,k'}(E), \mathbb{Z})$. Ce sous-groupe est réduit à 0 si $\mathcal{L}_{k,k'}(E)$ possède une section globale (corollaire 2 de la proposition 1.1.). Donc

PROPOSITION 4.3. (2) - $K(L,L') = 0$ si il existe un couple d'entiers (k,k') et un sous-fibré lagrangien N tel que pour tout x de X , $\dim(L_x \cap N_x) = k$ et $\dim(L'_x \cap N_x) = k'$.

5. Exemples.

1. - Soit (V, σ) un espace vectoriel symplectique de dimension finie et $\Lambda(V)$ sa grassmannienne lagrangienne. Le fibré trivial $\Lambda(V) \times V \rightarrow \Lambda(V)$ est muni d'une structure symplectique. Soient φ et ψ deux applications continues de $\Lambda(V)$ dans $\Lambda(V)$. φ et ψ définissent deux sous-fibrés lagrangiens auxquels on peut associer la classe de Maslov-Arnold $K(\varphi, \psi)$.

La classe de Maslov-Arnold usuelle correspond au cas où l'on prend pour φ une application constante et pour ψ l'identité de $\Lambda(V)$. C'est la classe du revêtement universel de $\Lambda(V)$.

En particulier si (V, σ) est l'espace vectoriel symplectique canonique $(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}, \sigma_0)$, φ l'application constante de valeur \mathbb{R}^{n*} , ψ l'identité, la classe de Maslov-Arnold correspondante sera notée K_0 . On note Λ_0 la grassmannienne lagrangienne de $(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}, \sigma_0)$.

Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold

Soit (E, σ) un fibré symplectique, L et L' deux sous fibrés lagrangiens et χ_U une carte symplectique adaptée à L . (Proposition 3.1.)

Soit $j_U : U \rightarrow \Lambda_0$ l'application qui à x dans U associe $\chi_U(L'_x)$ dans Λ_0 .

Soit \hat{j}_U le morphisme de fibrés symplectiques :

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{\hat{j}_U} & \Lambda_0 \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{j_U} & \Lambda_0 \end{array}$$

défini par $\hat{j}_U(X) = (j_U(p(X)), \chi_U(X))$

Soit $\mathcal{L}_0 \rightarrow \Lambda_0$ le fibré de fibre en λ l'ensemble des lagrangiens transverses à λ et à \mathbb{R}^{n*} et σ_0 le cocycle de Hörmander correspondant. $\mathcal{L}_0[\sigma_0] \in K_0$.

Comme $\hat{j}_U(L) = \mathbb{R}^{n*}$ et $\hat{j}_U(L'_x) = j_U(x)$ on a un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E_U) & \xrightarrow{\hat{j}_U} & \mathcal{L}_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{j_U} & \Lambda_0 \end{array}$$

tel que $\sigma_0 \circ \hat{j}_U = \sigma_U$, cocycle de Hörmander relatif à $\mathcal{L}(E_U)$. Il en résulte ⁽¹⁾ que $\mathcal{L}(E_U)(\sigma_U)$ est isomorphe à $\mathcal{L}_0[\sigma_0]$ et donc que $K(L, L')_U$, image réciproque de $K(L, L')$ par l'inclusion $U \hookrightarrow X$, est l'image réciproque de K_0 par j_U .

PROPOSITION 5.1. - Si (E, σ) est un fibré symplectique, L, L' deux sous-fibrés lagrangiens de E , χ_U une carte symplectique adaptée à L , $K(L, L')_U = j_U^{-1} K_0$.

Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold

2. Soit (X, ω) une variété symplectique, \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux feuilletages lagrangiens et $f : Y \rightarrow X$ une immersion. $f^{-1}TX \rightarrow Y$ est naturellement muni d'une structure symplectique et de deux sous-fibrés lagrangiens définis par \mathcal{F} et \mathcal{F}' . On peut donc parler de la classe de Maslov-Arnold $K(f, \mathcal{F}, \mathcal{F}')$.

3. Soit (X, ω) une variété symplectique, \mathcal{F} un feuilletage lagrangien et $f : Y \rightarrow X$ une immersion lagrangienne. Le fibré symplectique $f^{-1}TX \rightarrow Y$ est muni de deux sous-fibrés lagrangiens l'un associé à \mathcal{F} et l'autre à f . On peut donc parler de la classe de Maslov-Arnold $K(f, \mathcal{F})$.

En particulier si on prend pour f une immersion lagrangienne dans le fibré cotangent d'une variété X' , muni de sa structure symplectique canonique, et pour \mathcal{F} le feuilletage défini par les fibres de $T^*X' \rightarrow X'$, on peut parler de la classe de Maslov-Arnold de $f : K(f)$.

Enfin si $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une immersion lagrangienne \mathcal{F} étant le feuilletage défini par \mathbb{R}^{n*} , la construction de la proposition 5.1 est globale et, $j : \Lambda \rightarrow \Lambda_0$ désignant l'application $\lambda \rightarrow j(\lambda) = f^T(T_\lambda \Lambda)$, $K(f) = j^{-1}K_0$.

6. Propriétés de la classe de Maslov-Arnold.

THEOREME 6.1. - La classe de Maslov-Arnold est invariante par isomorphisme symplectique.

DEMONSTRATION. - Soit $(E_1 \rightarrow X_1, \sigma_1)$ et $(E_2 \rightarrow X_2, \sigma_2)$ deux fibrés

symplectiques et $E_1 \xrightarrow{\hat{u}} E_2$ un isomorphisme de fibrés symplecti-

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\hat{u}} & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{u} & X_2 \end{array}$$

ques, (L_1, L'_1) deux sous-fibrés lagrangiens de E_1 . $L_2 = \hat{u}(L_1)$ et $L'_2 = u(L'_1)$ sont deux sous fibrés lagrangiens de E_2 . \hat{u} induit un isomorphisme du fibré $\mathcal{L}(E_1)$ sur le fibré $\mathcal{L}(E_2)$ tel que le diagramme

suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} \otimes \mathcal{L}(E_1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes \mathcal{L}(E_2) \\
 \searrow \sigma_1 & & \swarrow \sigma_2 \\
 \mathbb{Z} & &
 \end{array}$$

Il en résulte que $\mathcal{L}(E_1)(\sigma_1)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_2)(\sigma_2)$ et donc que $u^{-1}K(uL_1, uL_2) = K(L_1, L_2)$.

THEOREME 6.2. - Soient L_1, L_2, L_3 trois sous-fibrés lagrangiens d'un fibré symplectique $(E \rightarrow X, \sigma)$

$$K(L_1, L_2) + K(L_2, L_3) + K(L_3, L_1) = 0.$$

DEMONSTRATION. - Soit $\tilde{\mathcal{L}}$ le sous-fibré de $\mathcal{L}(E)$ de fibre en x l'ensemble des lagrangiens transverses à L_1, L_2 et L_3 . $\tilde{\mathcal{L}}$ est trivialement un fibré au sens du paragraphe 1. Soit σ_{ij} la restriction à $\tilde{\mathcal{L}}$ du cocycle de Hörmander relatif à L_i et L_j si \mathcal{L}^{ij} désigne le sous-fibré de $\mathcal{L}(E)$ de fibre en x l'ensemble des lagrangiens de E_x transverses à L_{ix} et L_{jx} , il résulte de la proposition 1.1 que $\mathcal{L}[\sigma_{ij}]$ est isomorphe à $\mathcal{L}^{ij}[\sigma_{ij}]$. $K(L_i, L_j)$ est donc la classe de $\mathcal{L}[\sigma_{ij}]$.

$$\begin{aligned}
 \text{Or} \quad \sigma_{ij}(\mu_1, \mu_2) &= \sigma(L_i, L_j; \mu_1, \mu_2) \\
 &= \frac{1}{2}(s(L_i, \mu_2, L_j) - s(L_i, \mu_1, L_j)).
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \sigma_{12}(\mu_1, \mu_2) + \sigma_{23}(\mu_1, \mu_2) + \sigma_{31}(\mu_1, \mu_2) = 0.$$

Il en résulte, par passage au quotient, que

$$K(L_1, L_2) + K(L_2, L_3) + K(L_3, L_1) = 0$$

THEOREME 6.3. - Si on peut déformer continûment parmi les sous-fibrés lagrangiens de $(E \rightarrow X, \sigma)$ L sur L' , $K(L, L') = 0$.

DEMONSTRATION. - Soit L_t ($t \in [0, 1]$), la déformation de L sur L' . On munit E d'une structure complexe adaptée à σ ; Comme iL_t est un sous-fibré lagrangien transverse à L_t , iL_t est transverse à L_t , pour t' voisin de t . Par compacité on en déduit l'existence d'une subdivision finie de $[0, 1]$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ telle que iL_{t_p} soit transverse à L_t pour $t \in [t_p, t_{p+1}]$, $0 \leq p \leq k-1$. Soit \mathcal{L}_p le sous ensemble de $\mathcal{L}(E)$ réunion des $\mathcal{L}_p(x)$ où $\mathcal{L}_p(x)$ désigne l'ensemble des lagrangiens de E_x transverses à $L_t(x)$ pour $t \in [t_p, t_{p+1}]$. \mathcal{L}_p est un fibré possédant iL_{t_p} comme section globale. Or \mathcal{L}_p est un sous fibré du fibré $\mathcal{L}^{p,p+1}$ de fibre en x l'ensemble des lagrangiens transverses à L_{t_p} et $L_{t_{p+1}}$. Il en résulte (corollaire 2 proposition 1.1.) que $K(L_{t_p}, L_{t_{p+1}}) = 0$.

Du théorème 2 on déduit que $K(L, L') = \sum_{p=0}^{k-1} K(L_{t_p}, L_{t_{p+1}})$ et donc $K(L, L') = 0$ C.Q.F.D.

Le corollaire suivant est immédiat :

COROLLAIRE. - $K(L_1, L'_1) = K(L_2, L'_2)$ si on peut déformer continûment L_1 sur L_2 et L'_1 sur L'_2 parmi les sous-fibrés lagrangiens de E .

REMARQUE. - Soit $\mathcal{M}_{L, L'}^{\mathbb{R}}$, la \mathbb{R} -extension au fibré de Maslov $\mathcal{M}_{L, L'}$. Comme \mathbb{R} est contractible c'est un fibré trivialisable. On peut en fait préciser ceci :

PROPOSITION 6.1. - Soit (E, σ) un fibré symplectique, L et L' deux sous-fibrés lagrangiens. Toute structure complexe sur E adaptée à σ fournit de façon naturelle une trivialisisation de $\mathcal{M}_{L, L'}^{\mathbb{R}}$.

DEMONSTRATION. -

Soit (V, σ) un espace vectoriel symplectique de dimension réelle $2n$ et J une structure complexe sur V adaptée à σ . Soit \mathcal{C} le fibré

de base $\Lambda(V)$ et de fibre en M l'ensemble \mathcal{C}_M des lagrangiens transverses à M . La donnée de J permet de construire une application à valeurs réelles \mathcal{Q} sur le carré fibré $\mathcal{C}^{(2)}$: pour tout lagrangien M c'est l'unique application \mathcal{Q}^M définie et continue sur $(\mathcal{C}_M)^2$ telle que $\mathcal{Q}^M(\mu, \mu) = 0$ et que $\exp i \mathcal{Q}^M(\mu, \mu') = \phi(\mu, \mu')$ où $\phi(\mu, \mu')$ est ainsi définie : si (e_1, \dots, e_n) (resp (e'_1, \dots, e'_n)) est une base de μ (resp μ'), E étant muni d'une structure complexe, il existe un unique nombre complexe (non nul) z tel que

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_n = z \cdot (e'_1 \wedge \dots \wedge e'_n) .$$

$\frac{z}{\bar{z}}$ ne dépend que de μ et μ' et on pose $\phi(\mu, \mu') = \frac{z}{\bar{z}}$.

LEMME. - \mathcal{Q} est un \mathbb{R} -cocycle sur \mathcal{C} .

Comme il est prouvé dans (2) que $\mathcal{Q}(\mu_1, \mu_2) + \mathcal{Q}(\mu_2, \mu_3) - \mathcal{Q}(\mu_1, \mu_3) = 0$ il suffit de prouver que \mathcal{Q} est continue. Soit (M_0, μ_0) et (M_0, μ'_0) deux points de \mathcal{C} . On peut trouver dans $\Lambda(V)$ trois voisinages \mathcal{V}, W, W' respectivement de M_0, μ_0, μ'_0 tels que pour tout triple (M, μ, μ') de $\mathcal{V} \times W \times W'$, M soit transverse à μ et μ' , ce qui donne un sens à $\mathcal{Q}^M(\mu, \mu')$. Or (cf 2),

$$\mathcal{Q}^M(\mu, \mu') = \mathcal{Q}^{M_0}(\mu, \mu') + \sigma(M_0, M ; \mu, \mu')$$

Il en résulte immédiatement que \mathcal{Q} est continue sur $\mathcal{C}^{(2)}$.

Considérons alors le fibré symplectique canonique $\Lambda_0 \times \mathbb{C}^n \rightarrow \Lambda_0$ et les deux sous-fibrés lagrangiens définis par les applications de Λ_0 dans Λ_0 : $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ et ψ l'identité de Λ_0 . Avec les notations du paragraphe 5.1. on peut construire sur le fibré \mathcal{L}_0 une application $\theta_0 : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur la fibre en M , \mathcal{L}_0 par $\theta_0(\mu) = \mathcal{Q}^\mu(\mathbb{R}^{n*}, M)$. θ_0 est continue d'après le lemme et d'après (2)

$$\partial\theta_0 = \sigma_0.$$

Soit alors (E, σ) un fibré symplectique, J une structure complexe sur E adaptée à σ et $\theta : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie sur la fibre en x par $\mu \rightarrow \theta(\mu) = \Theta^H(L_x, L'_x)$. L'utilisation de cartes symplectiques (Proposition 3.1.) permet d'affirmer que θ est continue et que, avec les notations du paragraphe 5.1., sur une carte de domaine U adaptée à L , $\theta = \theta_0 \circ j_U$. Comme $\partial\theta = \sigma$, σ est donc un \mathbb{R} -cobord. θ définit donc une trivialisation de $\mathcal{M}_{LL'}^{\mathbb{R}}$. C.Q.F.D.

7. Diviseurs de Maslov.

Pour tout couple d'entiers naturels (k, k') tels que $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$ soit un fibré sur X , la classe de Maslov-Arnold $K(L, L')$ appartient à $H^1(\mathcal{L}_{k, k'}(E), \mathbb{Z})$. Les diviseurs relativement à $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$ se projetant sur $K(L, L')$ sont les applications $d : \mathcal{L}_{k, k'}(E) \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $d(z) \cdot d(z')^{-1} = \sigma_{k, k'}(z, z')$ si $p(z) = p(z')$. En particulier toute section s , non nécessairement continue, de $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$ fournit un diviseur relativement à $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$ se projetant sur $K(L, L')$: S défini par $S(z) = \sigma_{k, k'}(z, s(p(z)))$.

On appellera *diviseur de Maslov* toute application $d : \tilde{\mathcal{L}}(E) \rightarrow \mathbb{Z}$ (où $\tilde{\mathcal{L}}(E)$ est le fibré de tous les lagrangiens de E) telle que $d(z) = \Sigma(z, z') + d(z')$ si $pz = pz'$. Pour tout couple d'entiers (k, k') tel que $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$ soit un fibré, d induit un diviseur relativement à $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$ de projection $K(L, L')$ et, réciproquement, tout diviseur relativement à $\mathcal{L}_{k, k'}(E)$ de projection $K(L, L')$ s'étend en un diviseur de Maslov. Il en résulte que les diviseurs de Maslov définissent ~~des divi-~~ diviseurs topologiques au sens de (2) et (3) d'image la classe de Maslov dans $H^1(X, \mathbb{Z})$ où \mathbb{Z} est le faisceau des applications quelconques d'ouvert de X dans \mathbb{Z} .

Soit N un sous-fibré lagrangien de E . C'est une section continue de $\tilde{\mathcal{L}}(E)$. N définit un diviseur de Maslov $D^N : z \rightarrow \Sigma(z, N_{p(z)})$ qui

induit un diviseur relativement à $\mathcal{L}(E)$. Comme \mathcal{L} est continue sur $\mathcal{L}(E) \boxtimes \mathcal{L}_{k,k}(E)$, partout où les applications $x \rightarrow \dim(L_x \cap N_x)$ et $x \rightarrow \dim(L'_x \cap N_x)$ sont continues, D^N est continu. Donc :

PROPOSITION 7.1. (2) - Si N est un sous-fibré lagrangien, le support du diviseur de Maslov D^N associé à N est **contenu dans** l'ensemble des x de X tels que $x \rightarrow \dim(L_x \cap N_x)$ ou $x \rightarrow \dim(L'_x \cap N_x)$ est non continue en x .

Bibliographie. -

- (1) P. DAZORD, *Une interprétation géométrique de la classe de Maslov-Arnold*, . A paraître au Jour. de Math. Pures et Appl. et C. R. Acad. Sc. Paris, 1976, t. 282, n° 1, p. 53-55.
- (2) M. DEMAZURE, *Classe de Maslov II*, Exposé n° 10, Séminaire sur le fibré cotangent, ORSAY, 1975-76.
- (3) A. DOUADY, *Classe de Maslov I*, Exposé n° 6. Séminaire sur le fibré cotangent ; ORSAY, 1975-1976.

Pierre DAZORD
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE