PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

M. FLAMANT

Une nouvelle caractérisation des anneaux de Prufer

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 4
, p. 21-25
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_4_21_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1977 t.14-4

UNE NOUVELLE CARACTERISATION DES ANNEAUX DE PRUFER

par M. FLAMANT

I. PRÉLIMINAIRES.

Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, $S = A^*$ la partie multiplicative constituée par les éléments non nuls de A. Pour un A-module M, on désigne par ι_M l'application A-linéaire de M dans $K \otimes_A M$ définie par $\iota_M(m) = 1 \otimes m$ pour tout $m \in M$ (1).

PROPOSITION I.1. - *Soient* A *un anneau intègre,* K *son corps des fractions,* M *un* A*-module et* N *un sous-module de* M*. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) Le sous-module N *est saturé pour la partie multiplicative* S.

b) Le sous-module N *est l'image réciproque par* ι_M *du sous-espace vectoriel* $N_o = K \otimes_A N$ *du* K*-espace vectoriel* $K \otimes_A M$.

c) Le A*-module quotient* M/N *est sans torsion.*

a)$\Longrightarrow$b). Montrons que $\iota_M^{-1}(N_o) = N$. Tout d'abord $N \subset \iota_M^{-1}(N_o)$ car pour tout $n \in N$ on a $\iota_M(n) = 1 \otimes n \in K \otimes_A N$. D'autre part $\iota_M^{-1}(N_o) \subset N$, en effet soit $x \in \iota_M^{-1}(N_o)$, il existe $s \in S$ et $n \in N$ tels que $1 \otimes x = \frac{1}{s} \otimes n$ donc il existe $s' \in S$ tel que $s's.x = s'n$ donc $s'sx \in N$ et comme N est saturé pour la partie multiplicative S, $x \in N$.

b)$\Longrightarrow$a). Montrons que le sous A-module $N = \iota_M^{-1}(N_o)$ vérifie la propriété suivante :

$$s \in S \ , \ m \in M \ , \ sm \in N \Longrightarrow m \in N$$

En effet : $s \in S$, $m \in M$, $sm \in N \Longrightarrow s \otimes m = 1 \otimes sm \in N_o$, par suite $\frac{1}{s}(s \otimes m) = 1 \otimes m \in N_o$ donc $m \in N$.

c) $\Longrightarrow$ a). Soient $s \in S$; $m \in M$ tels que $sm \in N$. Il vient alors :
$\overline{sm} = s\overline{m} = 0 \Rightarrow \overline{m} = 0$, $m \in N$.

a) $\Longrightarrow$ c). Soient $\overline{m} \in M/N$, $s \in S$ tels que $s\overline{m} = 0$. Dans ces conditions
$s\overline{m} = \overline{sm} = c \Rightarrow sm \in N$ donc $m \in N$ et $\overline{m} = 0$.

DEFINITION I.1. - *On dit qu'un anneau intègre A est un anneau de Prüfer s'il vérifie la propriété (P) suivante :*

(P) : Tout A-module de type fini sans torsion est projectif.

Nous rappellerons sans démonstration le résultat classique suivant (2)

PROPOSITION I.2. - *Pour un anneau intègre A, les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) L'anneau A est un anneau de Prüfer.

b) Tout idéal non nul de A engendré par deux éléments est inversible.

PROPOSITION I.3. - *Pour un anneau intègre A, les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) l'anneau A est un anneau de Prüfer

b) Pour tout A-module de type fini M, l'image réciproque par ι_M de tout sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel $K \otimes_A M$ est un facteur direct de M.

c) Pour tout A-module de type fini sans torsion M, l'image réciproque par ι_M de tout sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel $K \otimes_A M$ est un facteur direct de M.

a) $\Longrightarrow$ b). Soit $N = \overset{-1}{\iota_M}(V)$ l'image réciproque par ι_M d'un sous-espace vectoriel V du K-espace vectoriel $K \otimes_A M$. Le sous-A-module N est saturé dans M pour la partie multiplicative S donc le A-module quotient M/N est sans torsion, étant de plus de type fini, il est projectif. La suite exacte
$0 \to N \to M \to M/N \to 0$ est scindée et N est un facteur direct de M.

b) $\Longrightarrow$ c). Evident.

c)$\Longrightarrow$a). Soit P un A-module de type fini sans torsion, il s'écrit sous la forme M/N où M est un A-module libre et N un sous-module de M. Le sous-A-module N est saturé dans M pour la partie multiplicative S donc il est facteur direct de M. La suite $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ est scindée donc P=M/N est un A-module projectif. L'anneau A est un anneau de Prüfer.

DEFINITION I.2. - *On appelle plan hyperbolique sur un anneau A tout A-module projectif de rang 2 muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et qui est somme directe de deux sous-modules totalement isotropes.*

PROPOSITION I.4. - *Un plan hyperbolique sur un anneau de Prüfer ne possède que deux facteurs directs totalement isotropes et tout vecteur isotropes et tout vecteur isotrope non nul appartient à l'un d'eux.*

Soit P un plan hyperbolique sur un anneau de Prüfer A, il existe des facteurs directs totalement isotropes M et N tels que $P=M\oplus N$. Soit u un élément isotrope non nul du A-module P, $s=1\otimes u$ est un vecteur isotrope non nul du K-espace vectoriel $K\otimes_A P$ et par suite l'une des deux seules directions isotropes de cet espace hyperbolique. Si Kt désigne l'autre direction isotrope, alors $P = \iota_P^{-1}(Ks) \oplus \iota_P^{-1}(Kt)$.

II. RÉSULTAT FONDAMENTAL.

THEOREME FONDAMENTAL.- *Soit A un anneau intègre. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) L'anneau A est un anneau de Prüfer.

b) Tout élément non nul du A-module $M=A\times A$ appartient à un facteur direct propre de M.

c) Pour tout élément non nul u du A-module $M=A\times A$, il existe sur M une structure de plan hyperbolique pour laquelle u est un vecteur isotrope.

Démontrons d'abord un lemme intéressant en lui-même.

LEMME. - *Soient* A *un anneau intègre,* M *le* A*-module* $A\times A$, $u=(x,y)$ *un élément non nul de* M *et* $\mathfrak{a}=Ax+Ay$ *l'idéal de* A *engendré par* x *et* y.

1) les propositions suivantes sont équivalentes :

a) L'idéal $\mathfrak{a}$ *est inversible.*

b) L'élément u *appartient à un facteur direct propre du* A*-module* M.

2) Si l'une des deux propositions précédentes est satisfaite et si N *est un facteur direct de* M *contenant l'élément* u*, alors les* A*-modules* M/N, N^* *et* $\mathfrak{a}$ *sont isomorphes.*

1 -

a)$\Longrightarrow$b) L'idéal $\mathfrak{a}=Ax+Ay$ étant inversible, il existe des éléments x' et y' de l'idéal fractionnaire $\mathfrak{a}^{-1}$ tels que : $xx'+yy'=1$. Posons $v=(y',-x')$ et considérons les sous-modules N et P de M respectivement définis par : $N=M\cap Ku$, $P=M\cap Kv$. Pour tout élément (s,t) de M, le système :

$$\begin{cases} x\lambda+y'\mu=s \\ y\lambda-x'\mu=t \end{cases} \quad \text{admet une solution et une seule dans } K, \text{ soit} \quad \begin{cases} \lambda=sx'+ty' \\ \mu=sy-tx \end{cases}.$$

Mais $\lambda(x,y)\in N$ et $\mu(y',-x')\in P$ par suite $M=N\oplus P$.

b)$\Longrightarrow$a). Soit N un facteur direct propre du A-module M contenant l'élément u. En désignant par N_o le K-espace vectoriel $K\otimes_A N$, il vient $N_o=Ku$ et par suite $N=M\cap Ku$. L'homomorphisme $\theta:N^*\longrightarrow\mathfrak{a}$ défini par $\theta(f)=f(u)$ est alors bijectif, en effet :

- l'homomorphisme θ est injectif ; supposons $f(u)=0$, le sous-module N est l'ensemble des éléments n de M pour lesquels il existe $s\in S$ tel que $sn=\lambda u$, $\lambda\in A$. Il vient alors :

$f(sn)=sf(n)=f(\lambda u)=\lambda f(u)=0$.

$f(n)=0$ $\forall n\in N$ d'où $f=0$.

- l'homomorphisme θ est surjectif ; soit $a=\alpha x+\beta y$ un élément de $\mathfrak{a}$, la forme linéaire f sur M définie par $f(.1,0)=\alpha$, $f(0,1)=\beta$ est telle que $f(u)=f\left[x(1,0)+y(0,1)\right]=a$. Il s'en suit que $\theta\left[f/N\right]=a$.

Le A-module N^* étant projectif et de type fini, $\mathfrak{a}$ est un A-module possèdant la même propriété et par suite l'idéal $\mathfrak{a}$ est inversible.

2 - Supposons que l'une des propriétés a) ou b) soit satisfaite et soit $M=N\oplus P$ une décomposition de A-module M en somme directe de deux sous-modules dont l'un, N, contient u. Si x' et y' sont deux éléments de $\mathfrak{a}^{-1}$ tels que $xx'+yy'=1$, alors P est isomorphe au sous-module des éléments de la forme $\mu(y',-x')$, $\mu=sy-tx$, s, $t\in A$. L'application $:\mu(y',-x')\mapsto\mu$ est un isomorphisme de P sur $\mathfrak{a}$.

Revenons à la démonstration du théorème fondamental. Le lemme que nous venons d'étudier montre l'équivalence des assertions a) et b). La proposition I.4 montre que c)$\Longrightarrow$b). Pour terminer il reste à voir que b)$\Longrightarrow$c). Soit $M=N\oplus P$ une décomposition de M en somme directe de deux sous-modules dont l'un, N, contient l'élément u. Il existe un isomorphisme $k : P \longrightarrow N^*$. Soit B la forme bilinéaire définie sur M M par :

$$B\Big[(n,p),(n',p')\Big] = B^N\Big[(n,k(p)),(n',k(p'))\Big]=k(p').n+k(p).n' . \qquad (3)$$

Le A-module bilinéaire (M,B) est un plan hyperbolique pour lequel u est un vecteur isotrope.

BIBLIOGRAPHIE:

[1] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, chap. 2, § 2 , n° 4.

[2] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, chap. 7

[3] M. FLAMANT et L. HADDAD, Espaces hyperboliques, Bull. S.M.F. 97 (1969), p. 299-307.

M. FLAMANT
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE