PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MARCO FONTANA

Carrés cartésiens et couples d'anneaux ayant les mêmes idéaux premiers

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1980, tome 17, fascicule 1
, p. 35-56
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1980__17_1_35_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1980 t.17-1

CARRES CARTESIENS ET COUPLES D'ANNEAUX AYANT LES MEMES IDEAUX PREMIERS

par

MARCO FONTANA (*)

0. INTRODUCTION

Dans ce papier , qui peut être vu comme une suite naturelle de [48], nous nous proposons de "revisiter" la théorie des couples d'anneaux ayant les mêmes idéaux premiers, développée dernièrement par ANDERSON-DOBBS [3], en utilisant la machinerie des carrés cartésiens, que nous avons mise au point récemment dans une série de travaux (cf. [13], [14] et aussi [48]).

Les avantages ressortiront immédiatement et consisteront, d'une part, en de très remarquables simplifications et importants retranchements des démonstrations et, d'autre part, en une mise en évidence fort claire des éléments essentiels, qui sont communs à plusieurs théories et, en particulier, à celle des anneaux de pseudo-valuation (cf. HEDSTROM-HOUSTON [24], [25], DOBBS [10] et FONTANA [48]).

Classification AMS (1980): 13A17, 13B02.

Vedettes Matières: Carré cartésien, anneau de pseudo-valuation, spectre premier d'un anneau, anneau noethérien, anneau cohérent, GD-anneau.

(*) Travail effectué dans la cadre des activités du C.N.R. (Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche, Geometriche e loro Applicazioni).

Après avoir consolidé les résultats déjà connus avec des formulations plus articulées et complètes (cf. Th. 1.2, Prop. 1.9, Prop. 1.13, Prop. 1.14, Prop. 1.15), nous parviendrons aussi à des résultats nouveaux concernant la montée et la descente de plusieurs propriétés relatives aux couples d'anneaux ayant les mêmes idéaux premiers.

Finalement, nous analyserons divers exemples pour mieux illustrer les résultats obtenus ici et pour donner un aperçu des applications de la théorie développée ci-dessous.

*****

Les anneaux considérés sont commutatifs unitaires.

Si A est un anneau (non nécessairement intègre) et si T est son anneau total de fractions, nous appellerons *sur-anneau de* A, tout sous-anneau de T qui contient A comme sous-anneau. Si M et N sont des sous-A-modules de T, alors nous dénoterons par $(M :_T N)$, ou simplement par $(M : N)$, le sous-A-module de T formé de tous les éléments x de T tels que $xN \subseteq M$.

Par *élément régulier* nous entendrons un élément non zéro et non diviseur de zéro.

Les notions ou notations non précisées sont celles de [2], [6] ou [18].

1. COUPLES D'ANNEAUX AYANT LES MEMES IDEAUX PREMIERS

Dans ce Paragraphe, nous allons formaliser la définition de "couple d'anneaux ayant les mêmes idéaux premiers", en généralisant, d'une façon naturelle, la relation qui relie un anneau de pseudo-valuation et l'anneau de valuation à lui canoniquement associé (cf. [48]). Nous étudierons, ensuite, quelques propriétés de ces anneaux et nous verrons qu'ils présentent une structure plus souple et riche de celle des PVD, aussi bien d'un point de vue intérieur (structure des idéaux) qu'extérieur (structure des sur-anneaux), même dans le cas noethérien intègre.

DEFINITION 1.1. Soit A un sous-anneau d'un anneau B. Nous dirons que l'inclusion $i : A \hookrightarrow B$ est une *ID-extension* si l'application continue canonique i^*: $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est l'identité.

Nous renvoyons au Paragraphe 2 pour une discussion systématique de plusieurs exemples; nous analyserons, particulièrement, le cas de ID-extensions qui ne proviennent pas, ni des constructions du type "D+M" (même, généralisées), ni des constructions des anneaux de pseudo-valuation.

THEOREME 1.2. *Soit* $i : A \hookrightarrow B$ *une inclusion propre d'anneaux. Les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

(i) $i : A \hookrightarrow B$ *est une ID-extension;*

(ii) A et B *ont les mêmes idéaux radicaux;*

(iii) i^*: $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ *est l'homéomorphisme identique;*

(iv) $i^*|_{\mathrm{Max}(B)}$ *est l'application identique entre* $\mathrm{Max}(B)$ *et* $\mathrm{Max}(A)$*;*

(v) $\mathrm{Max}(B) \subseteq \mathrm{Max}(A)$*;*

(vi) $\mathrm{Max}(A) \subseteq \mathrm{Max}(B)$*;*

(vii) A *et* B *sont des anneaux locaux et l'unique idéal maximal* $\underline{m}$ *de* A *coïncide avec l'unique idéal maximal de* B*;*

(viii) $(B,\underline{m})$ *est un anneau local et le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook, "i"'] & A/(\underline{m} \cap A) \arrow[d, hook] \\ B \arrow[r, two heads] & B/\underline{m} \end{tikzcd}$$

est cartésien.

DEMONSTRATION. Les implications (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v), (iv)$\Rightarrow$(vi), (iii)$\Rightarrow$(i) sont immédiates. Montrons que (v) (resp. (vi)) implique (vii). Si $\underline{m}'$ et $\underline{m}''$ sont deux idéaux maximaux distincts de B (resp. A) (ils sont aussi deux maximaux distincts de A (resp. B)), alors $\underline{m}'$ et $\underline{m}''$ sont co-maximaux et, donc $A = \underline{m}' + \underline{m}'' = B$. Ayant supposé $A \neq B$, nous parvenons à la conclusion.
(vii)$\Rightarrow$(viii): Etant $\underline{m} \cap A = \underline{m}$, la conclusion est immédiate. L'implication (viii)$\Rightarrow$(iii) découle directement de [13; Prop. 1.2 (1)]; cf. aussi [48; Th. 0.1 (b)]).■

REMARQUE 1.3. Dans le Th. 1.2, on ne peut pas affaiblir la condition (i) (resp. (ii)), comme l'on a fait pour la condition (iv) (voir (v) et (vi)), en supposant seulement que tout idéal premier ou radical de A (resp. B) est aussi un idéal premier ou radical de B (resp. A); voir l'exemple (2.6) suivant.

COROLLAIRE 1.4. *Soit* i : $A \underset{\neq}{\hookrightarrow} B$ *une ID-extension. Alors,* (a) *Pour tout idéal premier non maximal* $\mathfrak{p}$ *de* A, *l'homomorphisme canonique* $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}$ *est un isomorphisme.*

(b) *Pour tout idéal premier non maximal* $\mathfrak{p}$ *de* A, *et pour tout idéal* $\mathfrak{p}$*-primaire* $\mathfrak{h}$ *dans* A, $\mathfrak{h}B = \mathfrak{h}$ *est un idéal primaire dans* B.

(c) *L'unique idéal maximal de* A (*et* B), $\mathfrak{m}$, *est le conducteur de* i : $A \hookrightarrow B$.

(d) *Si* $\mathfrak{h}$ *est un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire dans* A, *alors* $\mathfrak{h}B$ (*qui ne coïncide pas en général avec* $\mathfrak{h}$) *est un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire dans* B. *Si* $\mathfrak{h}$ *est un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire dans* B, *alors* $\mathfrak{h} \cap A = \mathfrak{h}$ *est un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire dans* A. *Mieux:*

(e) *Pour tout idéal* $\mathfrak{b}$ *de* B, $\mathfrak{b} \cap A = \mathfrak{b}$; *donc tout idéal de* B *est aussi un idéal de* A.

DEMONSTRATION. Les affirmations (a) et (c) découlent de [13; Prop. 2.2]; cf. aussi [48; (0.4) et Th. 1.0]. (b) est une conséquence facile de (a). La première affirmation de (d) s'ensuit de quelques propriétés bien connues; cf. [2; Ex. 1.18 et Prop. 4.2]. La deuxième affirmation de (d) et la (e) sont des conséquences faciles du fait que tout idéal de B est contenu dans $\mathfrak{m}$ et que $\mathfrak{m}$ est un idéal de A.■

REMARQUES 1.5. (a) L'affirmation (e) du Cor. 1.4 n'assure pas, en général, que $A \hookrightarrow B$ soit une ID-extension; cf. l'inclusion $\tilde{A} \hookrightarrow A$ dans l'exemple (2.6) suivant.

(b) Si $A \hookrightarrow B$ est une ID-extension, on ne peut pas affirmer que A et B ont les mêmes idéaux primaires (bien que l'affirmation réciproque soit toujours vraie); cf. l'inclusion $\tilde{\tilde{A}} \hookrightarrow A$ dans (2.6).

PROPOSITION 1.6. *Soient* $i : A \underset{\neq}{\hookrightarrow} B$ *une ID-extension et* $\underline{m}$ *l'unique idéal maximal de* A *et* B.

(a) *S'il existe un élément régulier non inversible dans* A, *alors* $\mathrm{Tot}(A) = \mathrm{Tot}(B) = T$ *et, en outre,*

$$B \subseteq (\underline{m} :_T \underline{m}) \subseteq (A :_T \underline{m}).$$

(b) *Si* $\underline{p}$ *est un idéal premier de* A *(et* B*) qui contient un élément régulier de* A, *alors:*

$$B \subseteq (\underline{p} :_T \underline{p}) \subseteq (A :_T \underline{p}).$$

Supposons, de plus, que B *soit intègre et que* F *soit son corps de fractions, alors:*

(a') *Si* $B \neq F$, A *est un anneau intègre (qui n'est pas un corps) ayant* F *comme corps de fractions et, en outre,*

$$B \subseteq (\underline{m} :_F \underline{m}) \subseteq (A :_F \underline{m}).$$

(b') *Si* $\underline{p}$ *est un idéal premier non zéro de* A *(et de* B*), alors:*

$$B \subseteq (\underline{p} :_F \underline{p}) \subseteq (A :_F \underline{p}).$$

DEMONSTRATION. Il est clair que $\mathrm{Tot}(A) \subseteq \mathrm{Tot}(B)$. Si α est un élément régulier non inversible de A (donc $\alpha \in \underline{m}$), pour tout $x/y \in \mathrm{Tot}(B)$, avec $x, y \in B$ et y régulier, alors $x/y = x\alpha/y\alpha$ avec $x\alpha, y\alpha \in \underline{m} \subseteq A$ et $y\alpha$ régulier dans A. Les affirmations restantes sont tout à fait immédiates.■

REMARQUES 1.7. Conservons les notations et hypothèses de la Prop. 1.6.

(a) On signale que les inclusions, dans la Proposition 1.6, sont en général des inclusions propres (voir l'exemple (2.4) suivant). Néanmoins, on peut affirmer que $(\underline{m} : \underline{m}) = (A : \underline{m})$ si, et seulement si, $\underline{m}$ est un idéal non principal de A [3; Lemma 2.4] et que $A = (\underline{m}:\underline{m})$ si, et seulement si, $\underline{m}$ est soit principal soit non-divisoriel [3; Prop. 3.23].

(b) Pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A et B, on peut facilement voir que:

$$(A : \underline{m}) \subseteq (A : \underline{p}) \quad \text{et} \quad (\underline{m} : \underline{m}) \subseteq (\underline{p} : \underline{p}).$$

(c) On remarque aussi que, pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A, $(R : \underline{p})$ est un sous-R-module de l'anneau total de fractions de A, tandis que $(\underline{p} : \underline{p})$ est un anneau et, mieux, il est le plus grand sur-anneau de A dans lequel $\underline{p}$ est encore un idéal (non nécessairement premier; voir l'exemple (2.4)).

(d) L'anneau $(\underline{m} : \underline{m})$ est particulièrement utile dans l'étude des sur-anneaux de A. En effet, du diagramme cartésien:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A/\underline{m} \arrow[d, hook] \\ (\underline{m}:\underline{m}) \arrow[r, two heads, "v"] & (\underline{m}:\underline{m})/\underline{m} = S \end{tikzcd}$$

il s'ensuit que l'application $C \mapsto v(C)$ établit une correspondance biunivoque (dont $\tilde{C} \mapsto v^{-1}(\tilde{C}) \cong (\underline{m}:\underline{m}) \times_S \tilde{C}$ est la correspondance inverse) entre l'ensemble des sur-anneaux de A contenus dans $(\underline{m} : \underline{m})$ et l'ensemble des sous-anneaux de S qui contiennent, comme sous-anneau, le corps résiduel de A (cf. aussi [14; Lemma 1.10]). Donc, compte tenu de Th. 1.2, le problème de la recherche des sur-anneaux maximaux de A pour lesquels l'inclusion est encore une ID-extension, se transforme en un problème de corps: recherche des sous-corps maximaux de S qui contiennent, comme sous-corps, $A/\underline{m}$.

La Rq. 1.7 (d) permet de démontrer facilement la Proposition suivante:

PROPOSITION 1.8. *Soit* $A \hookrightarrow B$ *une ID-extension. Alors, pour tout anneau* C, $A \subseteq C \subseteq B$, *l'inclusion est une ID-extension si, et seulement si, le corps résiduel de* B, $k(B)$, *est une extension algébrique du corps résiduel de* A, $k(A)$.

DEMONSTRATION. En effet, tout anneau $\tilde{C}$, $k(A) \subseteq \tilde{C} \subseteq k(B)$, est un corps si, et seulement si, l'extension $k(A) \hookrightarrow k(B)$ est algébrique [18; Lemma 9.1]. ■

Le résultat qui suit est l'analogue pour les ID-extensions du résultat, donné dans [48], concernant la fermeture et clôture intégrale (et intégrale complète) des PVD.

PROPOSITION 1.9. *Soient* $A \subsetneq B$ *une ID-extension,* $\underline{m}$ *l'unique idéal de* A *(et* B*),* k(A) *(resp.* k(B)*) le corps résiduel de* A *(resp.* B*) dans* $\underline{m}$*,* $\bar{k}$ *la fermeture algébrique de* k(A) *dans* k(B)*,* $\bar{A}$ (resp. A*) *la fermeture intégrale (resp. la fermeture intégrale complète) de* A *dans* B*. Alors:*

(a) *L'homomorphisme canonique* $\bar{A} \longrightarrow B \times_{k(B)} \bar{k}$ *est un isomorphisme;*

(b) $\bar{A} = A^*$.

Si nous supposons que B *est un anneau intègre, mais pas un corps, et si nous dénotons par* F *le corps de fractions de* B*, alors nous savons déjà que* F *est aussi le corps de fractions de* A (cf. Prop. 1.6 (a')). *Si nous dénotons par* A' *(resp.* B'*) la clôture intégrale de* A *(resp.* B*) et par* C(A) *(resp.* C(B)*) la clôture intégrale complète de* A *(resp.* B*), alors:*

(a') $B = B' \Rightarrow \bar{A} = A'$;

(b') $C(A) = C(B)$.

DEMONSTRATION. La vérification de l'affirmation (a) est directe (cf. aussi [13; Cor. 1.5 (5)]). La (b) découle du fait que, dans le cas en question, un élément $b \notin B$ est quasi-entier sur A si, et seulement si, $b + \underline{m} \in k(B)$ est quasi-entier (ou, ce qui revient au même, entier) sur k(A) (cf. [18; Prop. 12.5]). (a'): Si $B = B'$, alors tout élément $x \in F$, qui est entier sur A, appartient à B. La conclusion découle facilement, compte tenu de l'affirmation (a). (b'): Il est clair que $C(A) \subseteq C(B)$. L'inclusion réciproque découle aussitôt du fait que $\underline{m} \neq (0)$ est un idéal aussi bien dans A que dans B (cf. aussi [18; Th. 12.1 (3)]).■

REMARQUE 1.10. La condition que B soit intégralement clos dans la Prop. 1.9 (a') est suffisante, mais non nécessaire; voir l'exemple (2.7). On peut remarquer que $\bar{A} = A'$ aussi dans le cas plus général suivant: $B \hookrightarrow B'$ est une ID-extension et $\bar{k}$ coïncide avec la fermeture intégrale de $k(A)$ dans $k(B')$ (corps résiduel de l'anneau local B').

COROLLAIRE 1.11. *Soit* $A \hookrightarrow B$ *une ID-extension. Si* A *est un anneau intègre complètement intégralement clos (par exemple, un anneau intègre à factorisation unique ou un anneau de Krull ou un anneau de valuation de dimension 1) qui n'est pas un corps, alors* A = B.

DEMONSTRATION. Simple conséquence de la Prop. 1.9 (b').■

REMARQUE 1.12. Il faut noter que la conclusion du Cor. 1.11 est valable aussi si A est un anneau de valuation tout à fait général, car, dans ce cas, tout sur-anneau de A est une localisation de A.

Avant de donner quelques résultats de descente et montée, par les ID-extensions, des propriétés de noethérianité et cohérence (de la même teneur que ceux concernant l'inclusion d'un PVD dans l'anneau de valuation canoniquement associé) nous allons caractéri ser la finitude de l'idéal maximal dans une ID-exten sion.

PROPOSITION 1.13. *Soient* $A \hookrightarrow B$ *une ID-extension d'anneaux et* $k(A)$ *(resp.* $k(B)$*) le corps résiduel de* A *(resp.* B*) dans l'unique idéal maximal de* A *et* B. *Supposons que* $\underline{m} \neq (0)$ *(c.-à-d.* A *(et* B*) ne sont pas des corps). Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) $\underline{m}$ *est un idéal de type fini de* A;

(ii) $\underline{m}$ *est un idéal de type fini de* B *et* $[k(B) : k(A)] < \infty$;

(iii) *Il existe un suite exacte de* A-*modules de type fini du genre suivant:*

$$0 \longrightarrow \underline{m}^r \longrightarrow A^s \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad \textit{avec} \quad r \geq 1,\ s \geq 2,$$

(donc, en particulier, B *est un* A-*module de présentation finie).*

DEMONSTRATION. (i) $\Rightarrow$ (ii): La première affirmation est triviale, tandis que la deuxième est une con séquence immédiate du Lemme de Nakayama. (ii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iii): Il est facile de voir que $A \hookrightarrow B$ est un homomorphisme fini, étant $[k(B) : k(A)] < \infty$. En effet, si $\{\bar{b}_i = b_i + \underline{m} \mid 1 \leq i \leq n\}$ est une base de $k(B)$ sur $k(A)$, alors, pour tout $b \in B$, nous avons:

$$b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + m, \quad \text{avec} \quad a_i \in A \quad \text{et} \quad m \in \underline{m}.$$

Etant $\underline{m}$ un idéal de type fini dans B et B un A-module de type fini, $\underline{m}$ est un idéal de type fini dans A, donc, si $\{\alpha_j \mid 1 \leq j \leq t\}$ est un système de générateurs de $\underline{m}$ dans A, alors $\{b_i, \alpha_j \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq t\}$ est un système de générateurs de l'A-module B (c.-à-d. (ii) $\Rightarrow$ (i)). De plus, si:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{j=1}^{t} a'_j \alpha_j = 0, \quad \text{avec} \quad a_i,\ a'_j \in A,$$

alors:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \bar{b}_i = 0, \quad \text{avec } \bar{a}_i = a_i + \underline{m} \quad \text{et } \bar{b}_i = b_i + \underline{m}$$

Par conséquent, $a_i \in \underline{m}$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Donc, l'homomorphisme surjectif $A^s = A^n \oplus A^t \longrightarrow B$ $((a_i), (a'_j)) \longmapsto \sum a_i b_i + \sum a'_j \alpha_j$ est tel que son noyau est isomorphe à une somme directe de copies de $\underline{m}$. La conclusion suit immédiatement de la finitude de $\underline{m}$. L'implications (iii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. ■

PROPOSITION 1.14. *Conservons les notations et hypothèses de la* Prop. 1.13. *Soit* $\bar{A}$ *la fermeture intégrale de* A *dans* B. *Les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

(i) A *est un anneau noethérien;*

(ii) $\underline{m}$ *est un idéal de type fini de* A *et* B *est un anneau noethérien;*

(iii) $[k(B) : k(A)] < \infty$ *et* B *est un anneau noethérien;*

(iv) $\bar{A}$ *est un anneau noethérien et l'homomorphisme* $A \hookrightarrow \bar{A}$ *munit* $\bar{A}$ *d'une structure de* A-*module de présentation finie;*

(v) *Pour tout anneau* C, *tel que* $A \subseteq C \subseteq B$, $A \hookrightarrow C$ *est un ID-extension et* C *est un anneau noethérien.*

DEMONSTRATIONS. Les équivalences (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv) découlent facilement du Th. 1.2 et des Propp. 1.9 et 1.13, compte tenu de [13; Th. 2.3] (cf. aussi [48; (0.4)]) et de [47; Th. 2]. (iii) $\Rightarrow$ (v): Nous savons que tout anneau C, tel que $A \subseteq C \subseteq B$, est isomorphe à $v^{-1}(v(C)) \cong B \times_{k(B)} v(C)$, étant $v: B \twoheadrightarrow k(B)$ la projection canonique (cf. Rq. 1.7 (d)). La conclusion découle facilement du fait que tout anneau contenu entre k(A) et k(B) est nécessairement un corps, car $[k(B) : k(A)] < \infty$ (cf. aussi Prop. 1.8). L'implication (v) $\Rightarrow$ (i) est triviale. ■

En ce qui concerne la cohérence, nous avons le résultat suivant, tout à fait analogue à celui, énoncé ci-dessus, relatif à la noethérianité.

PROPOSITION 1.15. *Soient* $A \subsetneq B$ *une ID-extension et* k(A) *(resp.* k(B)*) le corps résiduel de* A *(resp.* B*) dans l'unique idéal maximal* $\underline{m}$ *de* A *et* B. *Dénotons par* $\bar{A}$ *la fermeture intégrale de* A *dans* B. *Supposons, aussi, qu'il existe un élément régulier non inversible dans* A *(donc, dans ce cas,* A *et* B *ne sont pas des corps et ils ont le même anneau total de fractions;* cf. Prop. 1.6 (a)*). Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

(i) A *est un anneau cohérent;*

(ii) $\underline{m}$ *est un idéal de type fini dans* A *et* B *est un anneau cohérent;*

(iii) $\underline{m}$ *est un idéal de type fini dans* B, $[k(B) : k(A)] < \infty$ *et* B *est un anneau cohérent;*

(iv) $\bar{A}$ *est un anneau cohérent et l'homomorphisme* $A \hookrightarrow \bar{A}$ *munit* $\bar{A}$ *d'une structure de* A-*module de présentation finie;*

(v) *Pour tout anneau* C, *tel que* $A \subseteq C \subseteq B$, $A \hookrightarrow C$ *est une* ID-*extension et* C *est un anneau cohérent.*

DEMONSTRATION. Compte tenu de la Prop. 1.9, de la Prop. 1.13 et de [40; Cor. 1.2], pour démontrer les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) il suffit de montrer que, si A est cohérent, alors $\underline{m}$ un idéal de type fini dans A. Pour vérifier cela, nous allons considérer $b \in B \setminus A$, b est inversible dans B (car $b \notin \underline{m}$) et $b^{-1} \in B \setminus A$. Il est clair que $\underline{m} \subseteq b^{-1}A \cap A$. D'autre part, si $b^{-1}a \in A$, pour un quelque $a \in A$, alors $a \in \underline{m}$ (car autrement, a serait inversible, et donc $b^{-1} \in A$), par conséquent $b^{-1}A \cap A = \underline{m}$. En outre, $b^{-1} = a'/a''$, avec $a', a'' \in A$ et a'' régulier dans A (car A et B ont le même anneau total de fractions), donc $b^{-1}A \cap A = a'A \cap a''A = \underline{m}$. De la cohérence de A, il s'ensuit que $\underline{m}$ est un idéal de type fini dans A. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (v) se démontre comme l'implication (iii) $\Rightarrow$ (v) de la Prop. 1.14 (cf. aussi la Prop. 1.8). L'implication (v) $\Rightarrow$ (i) est triviale.■

REMARQUE 1.16. Nous ne savons pas si un résultat du type "Prop. 1.15" est valable aussi pour les anneaux intègres à conducteur fini. Néanmoins, le même raisonnement suivi dans la démonstration de la Prop. 1.15, nous assure que si $A \hookrightarrow B$ est une ID-extension, si $A \neq B$, si $\underline{m} \neq (0)$ et si A est un anneau intègre à conducteur fini, alors $\underline{m}$ est un idéal de type fini dans A (donc, l'homomorphisme $A \hookrightarrow B$ munit B d'une structure de A-module de présentation finie). Il serait très intéressant d'approfondir l'étude des propriétés de descente et de montée de la propriété de être anneau intègre à conducteurs fini, par rapport à des homomorphismes satisfaisant à quelques propriétés de finitude. A ce propos, nous signalons qu'on ne connaît pas la réponse à la question suivante:

La clôture intégrale d'un anneau intègre à conducteur fini est encore un anneau à conducteur fini? (cf. par exemple [49; Rk. 21]).

Le caractère fort "liant„ des ID-extensions est mis en évidence par le résultat suivant:

THEOREME 1.17. *Soient* $A \hookrightarrow B$ *une ID-extension et* **P** *une des propriétés suivantes:*

(a) *G-anneau intègre* (cf. [27])

(b) *anneau de Goldman* (cf. [15])

(c) *g-anneau* (cf. [37])

(d) *anneau localement pqr* (cf. [38])

(e) *anneau laskerien* (*cf.* [6; Ch. 4, § 2, Ex. 23]);

(f) *anneau fortement laskerien* (*cf.* [6; Ch. 4, § 2, Ex. 28]);

(g) *anneau à spectre noethérien* (*cf.* [6; Ch. 2, § 4, N. 2]);

(h) *GD-anneau* (*cf.* [46]);

(i) *anneau ouvert* (*cf.*[34; Sec. 3]);

(j) *anneau divisé* (*cf.* [1], [8] *et aussi* [14]);

(k) *PVD* (*cf.* [48]).

Alors, l'anneau A *vérifie* **P** *si, et seulement si, l'anneau* B *vérifie* **P**.

Soit **Q** *une des propriétés suivantes:*

(ℓ) *anneau de Prüfer;*

(m) *anneau de Dedekind;*

(n) *anneau de Bézout;*

(o) *anneau pseudo-bézoutien (ou; GCD-anneau);*

(p) *G-anneau fort* (*cf.* [38]).

Alors, si A *vérifie* **Q**, A = B.

DEMONSTRATION. Remarquons, tout d'abord, que A est un anneau réduit (ou, intègre) qui n'est pas un corps si, et seulement si, B est de même. En ce qui concerne (a) et (d), et, dans le cas réduit, (b) et (c), nous savons que les propriétés algébriques, dont il est l'objet, peuvent être caractérisées topologiquement, par des propriétés du spectre premier (cf. par exemple [14; Lemme 1.5]), d'où la conclusion, compte tenu du Th. 1.2 ((i) ⇔ (iii)) et du fait que, dans le cas (b) et (c), un anneau R vérifie **P** si, et seulement si, R_{red} vérifie **P**. Les affirmations (e) et (f) sont une conséquence d'un résultat général de BARUCCI-FONTANA [4; Th. 6], tandis que la (g) est triviale, d'après le Th. 1.2 ((i) ⇔ (iii)). (h): Il est clair que, si A est un GD-anneau, B l'est aussi. Soit B un GD-anneau qui n'est pas un corps. Pour démontrer que A est un GD-anneau il suffit de voir que, pour tout $\underline{P} \in \mathrm{Spec}(A)$ et tout $v \in \underline{P}A_{\underline{P}}$, il existe $n \geq 1$ de façon telle que $v^n A[v] \subset \underline{P}$ (cf. [20; Prop. 2.1]). Mais, compte tenu du Cor. 1.4 (a), $\underline{P}A_{\underline{P}} \cong \underline{P}B_{\underline{P}}$ et, en outre, étant B un GD-anneau, il existe $n \geq 1$, de façon telle que $v^n B[v] \subset P$; la conclusion est désormais immédiate. (i): Il suffit de rappeler qu'un anneau intègre R est ouvert si, et seulement si, il est un GD-anneau et pour tout $\underline{P} \in \mathrm{Spec}(R)$ l'ensemble des générisations de $\underline{P}$ est ouvert [34; Prop. 3.2]. La conclusion suit alors du Th. 1.2 et du point (h). L'affirmation (j) est une conséquence immédiate du Cor. 1.4 (a). (k): Si B est un PVD et si V est le sur-anneau de valuation de B canoniquement associé à B (cf. [48; Th. 1.0]), alors $A \cong B \times_{k(B)} k(A) \cong$ $\cong (V \times_{k(V)} k(B)) \times_{k(B)} k(A) \cong V \times_{k(V)} k(A)$, d'où on conclut que A est un PVD (cf. [48; loc. cit.]). Inversement, si A est un PVD et si V est le sur-anneau de valuation de A canoniquement associé à A, alors B doit être comparable (par rapport à la relation d'inclusion) avec V. Du fait que $A \hookrightarrow B$ est une ID-extension, B ne peut pas contenir proprement V, donc $B \subseteq V$. La conclusion découle immédiatement du fait que A, B et V ont le même idéal maximal, donc $B \cong V \times_{k(V)} k(B)$.

Du fait que tout anneau intègre de Bézout ou de Dedekind et tout G-anneau intègre est un anneau de Prüfer, pour démontrer les points (m), (n) et (p), il suffit de prouver le point (ℓ). Mais, compte tenu du

Th. 1.2, l'affirmation (ℓ) a déjà été démontré [13; Th. 2.4]. (o): Tout anneau pseudo-bézoutien, qui ne est pas un corps, est intégralement clos [27; Th. 50] et à conducteur fini [18; Appendix 4, Th. B], la conclusion découle immédiatement de la Prop. 1.9, de la Prop. 1.13 et de la Remarque 1.16.■

REMARQUE 1.18. Soit $i : A \hookrightarrow B$ une ID-extension. Il faut noter que si B est un i-anneau [34; Sec. 2], alors A n'est pas nécessairement un i-anneau (cf. [48; Cor. 1.4]), bien que l'affirmation réciproque soit toujours vraie.

2. EXEMPLES.

(2.1) Toute inclusion de corps est une ID-extension.

(2.2) Si A est un anneau de pseudo-valuation et si V est le sur-anneau de valuation de A, canoniquement associé à A (cf. [48]), alors l'inclusion $A \hookrightarrow V$ est une ID-extension.

(2.3) Soient K un corps, X une indéterminée sur K et B l'algèbre de von Staudt $K[\varepsilon] = K[X]/(X^2)$, où $\varepsilon = X + (X^2)$. Pour tout sous-corps k de K, le sous-anneau $A = k + \varepsilon K[\varepsilon]$ de B est tel que l'inclusion $A \hookrightarrow B$ est une ID-extension d'anneaux non intègres (et mieux, l'unique idéal premier de A et B est εK, qui est principal dans B mais qui n'est pas principal dans A si $k \subsetneq K$).

(2.4) Soient K un corps, X une indéterminée sur K et $(A,\underline{m})$ l'anneau local intègre $(K[X]_{(X)},(X))$. Il est facile de voir que:

$$A = (\underline{m} : \underline{m}) \subsetneqq (A : \underline{m}) = X^{-1}A$$

Donc, A ne possède aucun sur-anneau propre B de façon telle que l'inclusion $A \hookrightarrow B$ soit une ID-extension (cf. Remarque 1.7 (d)). Par contre, pour tout sous-corps k de K, l'anneau $A' = k + XA$ est tel que l'inclusion de A' dans son sur-anneau A est une ID-extension.

Soient $h \geq 0$ un entier et $(A_h,\underline{m}_h)$ l'anneau local $(K[X^2,X^{2h+1}]_{(X^2,X^{2h+1})}, (X^2,X^{2h+1}))$ (anneau associé au point origine de la courbe affine plane d'équation $y^2 - x^{2h+1} = 0$). Il est alors facile de voir que:

$$A_h \subsetneqq (\underline{m}_h : \underline{m}_h) = (A_h : \underline{m}_h) = A_{h-1} \quad h \geq 1,$$

étant $(A_0,\underline{m}_0) = (A,\underline{m})$, et aussi que la clôture intégrale de A_h coïncide avec A, pour tout $h \geq 1$. En outre, pour tout $h \geq 1$, $\underline{m}_h \subsetneqq \underline{m}_{h-1}$ et $\underline{m}_h$ est un idéal $\underline{m}_{h-1}$-primaire. Donc, de la suite suivante:

$$K = A_h/\underline{m}_h \subsetneqq A_{h-1}/\underline{m}_h \twoheadrightarrow A_{h-1}/\underline{m}_{h-1} = K$$

il s'ensuit que l'inclusion $A_h \hookrightarrow A_{h-1}$, pour tout $h \geq 1$, n'est pas une ID-extension (cf. Th. 1.2), bien qu'elle soit une extension entière et unibranche, car $A_{h-1} \subsetneqq A'_h = A$ et l'application canonique $\mathrm{Spec}(A_{h-1}) \to \mathrm{Spec}(A_h)$ est un homéomorphisme.

Soient k un corps et T une indéterminée sur k. Supposons que $K = k(T)$. Du fait que $A_h = K + \underline{m}_h$, pour tout $h \geq 0$ et que, maintenant, $K = k(T)$, nous pouvons considérer le sous-anneau $B_h = k + \underline{m}_h$ de A_h. Il est facile de voir que B_h est intégralement fermé dans A_h, pour tout $h \geq 0$, car $k \hookrightarrow K$ est une extension transcendante (cf. [48; Prop. 1.3]), et que $B_h \hookrightarrow A_h$ est une ID-extension. Pour calculer la clôture intégrale de B_h, il suffit de considérer la clôture intégrale $A_h' = A$ de A_h et observer que $A_h' = K + \underline{m}$. Alors, il est immédiat de voir que $B_h' = k + \underline{m}$ et donc $B_h = B_h'$ si, et seulement si, $h = 0$ (c.-à-d. $A_h = A = A'$).

(2.5) Soient $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers, X une indéterminée sur $\mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}[X]$, p un entier premier, $n \geq 2$, $f(X) = X^{p^n} - X$ et $\underline{m} = pA + f(X)A$. Il est clair que $A/\underline{m} \cong \mathbb{F}(q)$, où $q = p^n$ et $\mathbb{F}(q)$ est le corps de Galois d'ordre q. Pour tout $q' = p^h$ avec $h \leq n$, dénotons par F' le sous-corps de $A/\underline{m}$ isomorphe au corps de Galois $\mathbb{F}(q')$. Soient $A(q) = A_{\underline{m}}$, $F = A/\underline{m}$, $v\colon A(q) \twoheadrightarrow F$ la projection canonique et $A(q,q') = v^{-1}(F') \cong A(q) \times_F F'$. Alors, l'inclusion $A(q,q') \hookrightarrow A(q)$ est une ID-extension d'anneau locaux intègres de dimension 2. L'anneau $A(q)$ (et l'anneau $A(q,q')$) n'est pas un anneau de pseudo-valuation, puisqu'il est noethérien 2-dimensionnel (cf. [48; Cor. 1.6]); en outre, $A(q,q') \hookrightarrow A(q)$ est un homomorphisme fini, donc $A(q,q')$ est aussi un anneau noethérien. De plus, l'anneau $A(q,q')$ ne peut pas être obtenu, en aucune façon, par le moyen d'un procédé de type "D + M" (cf. GILMER [18; Appendix 2] et BREWER-RUTTER [44]), puisque, par des raisons de caractéristique,

$A(q)$ n'est pas de type "$F + M$".

(2.6) Soient k un corps, X, Y et U des indéterminées sur k, $A = k(U)[X,Y]_{(X,Y)}$, $B = k[U]_{(U)}$, $\tilde{A} = B + (XA + YA)$ et $\tilde{\tilde{A}} = k + (XA + YA)$. Il est clair que $\tilde{\tilde{A}} \subsetneqq \tilde{A} \subsetneqq A$ est une chaîne d'anneaux locaux intègres ayant le même corps de fractions $k(U, X, Y)$ (cf. [13; Cor. 1.5 (7)]). Il est clair aussi que l'inclusion $\tilde{\tilde{A}} \hookrightarrow A$ est une ID-extension d'anneaux (qui ne sont pas des PVD). D'autre part ni $\tilde{\tilde{A}} \hookrightarrow \tilde{A}$ ni $\tilde{A} \hookrightarrow A$ est une ID-extension, bien que tout idéal premier (resp. radical) de $\tilde{\tilde{A}}$, ou de A, soit un idéal premier (resp. radical) de $\tilde{A}$. En effet, l'idéal maximal $\underline{m}$ de A (et $\tilde{\tilde{A}}$) est un idéal premier non maximal de $\tilde{A}$. En outre, il est évident que tout idéal primaire dans A est aussi primaire dans $\tilde{\tilde{A}}$, mais l'affirmation réciproque est fausse (par exemple l'idéal $\underline{\tilde{\tilde{a}}} = X\tilde{\tilde{A}} + Y\tilde{\tilde{A}}$ est $\underline{m}$-primaire dans $\tilde{\tilde{A}}$, car $\underline{m}^2 \subset \underline{\tilde{\tilde{a}}}$, mais il n'est même pas un idéal dans A). On peut remarquer, aussi, que tout idéal de A est aussi un idéal dans $\tilde{A}$ (outre que dans $\tilde{\tilde{A}}$).

(2.7) Soient K un corps, X et T deux indéterminées sur K, $n \geq 2$, $E = K(X)$, $F = K(X^n)$, $C = E[T]_{(T)}$ et $v: C \twoheadrightarrow E$ la projection canonique qui envoie T dans 0. Si $A = K + TC$ et $B = F + TC$, alors il est clair que l'inclusion $A \hookrightarrow B$ est une ID-extension, ainsi que l'inclusion $B \hookrightarrow C$, et que A, B et C sont des anneaux intègres ayant le même corps de fractions, c'est-à-dire $K(X,T)$. En outre, on peut voir facilement que A est intégralement clos, tandis que B ne l'est pas, étant

B' = C, puisque l'extension $K \hookrightarrow F$ est transcendante et l'extension $F \hookrightarrow E$ est finie.

BIBLIOGRAPHIE

Pour les références de [1] à [43] voir la bibliographie de [48].

[44] J.W. BREWER - E.A. RUTTER, D + M constructions with general overrings. Michigan Math. J. 23 (1976), 33-42.

[45] D.E. DOBBS - I.J. PAPICK, On going-down for simple overrings, III. Proc. AMS 54 (1976), 35-38.

[46] D.E. DOBBS - I.J. PAPICK, Going-down: a survey. Nieuw Arch. Wisk. 26 (1978), 255-291.

[47] P.M. EAKIN, The converse to a well-known theorem on Noetherian rings. Math. Ann. 177 (1968), 278-282.

[48] M. FONTANA, Carrés cartésiens et anneaux de pseudo-valuation. (A paraître).

[49] M. ZAFRULLAH, On finite conductor domains. Manuscripta Math. 24 (1978), 191-204.

Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex

Adresse Permanente:
Istituto Matematico "Guido Castelnuovo"
Università degli Studi di Roma
00185 Roma (Italie)