NEJIB ZAGUIA

Chapitre III Dimension de Krull des ensembles ordonnés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 7D
« Chaînes d'idéaux et de sections initiales d'un ensemble ordonné », , p. 67-97
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___7D_67_0>

CHAPITRE III

DIMENSION DE KRULL DES ENSEMBLES ORDONNES

Résumé.

Nous étudions une notion générale de déviation, incluant la notion classique. En accord avec J.C. ROBSON nous définissons la dimension de KRULL d'un ensemble ordonné P comme la déviation de l'ensemble $\underset{\sim}{F}(P)$ des sections finales de P, ordonné par inclusion. En utilisant une généralisation du théorème de partition de ERDOS-DUSHNIK-MILLER nous montrons que cette dimension de KRULL est le maximum des dimensions de KRULL des extensions linéaires de P. Lorsque P est belordonné ce résultat est une conséquence facile du théorème de DE JONGH et PARIKH (et lui est en fait équivalent). Ajouté à un autre résultat de ces auteurs il donne directement la valeur de la dimension de KRULL d'un produit de deux ensembles belordonnés, valeur calculée par J.C. ROBSON.

I - LES NOTIONS FONDAMENTALES.

I-1. Déviation d'un ensemble ordonné.

Soit P un ensemble ordonné, nous voulons mesurer de combien P *"dévie"* des ensembles bien fondés.

- Si P est bien fondé alors il n'en dévie pas ! sa déviation est donc nulle et nous notons $\operatorname{dev} P = 0$.

- Supposons que P n'est pas bien fondé, i.e., il existe une suite strictement décroissante $a_o > a_1 \ldots > a_n \ldots$. Nous disons que P *dévie une fois,* et nous notons $\operatorname{dev} P = 1$, dès que pour toute suite strictement décroissante $a_o > a_1 \ldots > a_n \ldots$ les intervalles $[a_{n+1}, a_n]$ ont une déviation nulle pour presque tout n, i.e. pour n assez grand.

Soit α un ordinal. Supposons définis les ensembles ordonnés de déviation strictement inférieur à α. Nous disons que P *dévie* α fois, et nous notons $\operatorname{dev} P = \alpha$ si :

1). $\operatorname{dev} P \not< \alpha$ (c'est-à-dire P n'a pas une déviation strictement inférieure à α),

2). Pour toute suite strictement décroissante $a_o > a_1 \ldots > a_n \ldots$, alors $\operatorname{dev}[a_{n+1}, a_n] < \alpha$ pour presque tout n.

N.B. avec cette définition $\operatorname{dev} \emptyset = 0$. On peut tout aussi bien convenir que $\operatorname{dev} \emptyset = -1$, ou,comme le fait ROBSON,poser $\operatorname{dev} \emptyset = -\infty$. On ne rentrera pas dans une discussion sur les divers avantages ou inconvénients de ce choix.

Exemples.

La déviation d'un ordinal, par exemple ω, est nulle. Pour les anti-ordinaux, on a par exemple $\operatorname{dev} \omega^* = 1$, $\operatorname{dev}(\omega^* + \omega^*) = 1$, $\operatorname{dev}(\omega^*)^2 = 2$. Plus généralement :

Soit β un ordinal, dont l'écriture *sous forme normale* est $\beta = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$

avec $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$ *et* $n_1, \ldots, n_k \neq 0$. *Alors* dev $\beta^* = \alpha_1$. *En d'autres termes la déviation d'une chaîne* C *anti-bien ordonnée* $\neq 0$, *est le plus grand ordinal* α *tel que* $(\omega^\alpha)^* \leq C$. (Preuve immédiate par induction sur β).

Pour les ensembles partiellement ordonnés on a ceci :

I-1.1. PROPOSITION.

Soit P un ensemble ordonné satisfaisant la condition de chaîne ascendante alors P a une déviation et

sup{dev C où C est une chaîne de P} $\leq$ dev P $\leq$ dev $h^*(P^*)$

où $h^*(P^*)$ est l'anti-ordinal associé à la hauteur $h(P^*)$ de l'ensemble bien fondé P^*.

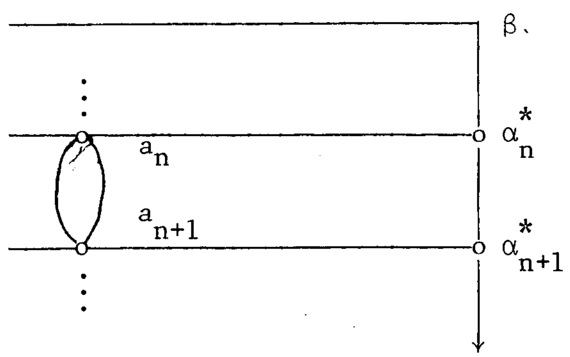
Preuve.

Par induction sur $\beta = h(P^*)$.

- Si P est bien fondé alors les deux premiers membres des inégalités sont nuls et on a le résultat (indépendamment de la valeur de β).

- Sinon soit $a_o > a_1 \ldots > a_n \ldots$ une suite strictement décroissante. On a $h([a_{n+1}, a_n]^*) < h(P^*)$ donc la déviation de $[a_{n+1}, a_n]$ est définie et satisfait $\text{dev}([a_{n+1}, a_n]) \leq \text{dev } h^*([a_{n+1}, a_n]^*)$.

Or $h([a_{n+1}, a_n]^*) \leq h([\alpha_n, \alpha_{n+1}])$ où $\alpha_n = h(a_n, P^*)$.



On obtient alors $\text{dev}([a_{n+1}, a_n]) \leq \text{dev}([\alpha^*_{n+1}, \alpha_n]) < \text{dev } h^*(P^*)$.

I-1.2. COROLLAIRE.

Si P^* contient une chaîne de même type que sa hauteur alors $\operatorname{dev} P = \operatorname{dev} h^*(P^*) = \operatorname{Max}\{\alpha \ / \ (\omega^\alpha)^* < P\}$.

I-2. Dimension de Krull d'un ensemble ordonné.

Etant donné un ensemble ordonné P, la *dimension* de KRULL de P, notée $K \dim P$, est la déviation de l'ensemble $\underset{\sim}{F}(P)$ des sections finales de P, ordonné par inclusion.

Exemple.

Si β est un ordinal, alors $\underset{\sim}{F}(\beta) \cong 1 + \beta^*$ et donc $K \dim \beta = \operatorname{dev} \beta^*$!

Pour tout ensemble ordonné P, l'ensemble $\underset{\sim}{F}(P)$ est anti-isomorphe à l'ensemble $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales de P, i.e. $\underset{\sim}{F}(P) \cong \underset{\sim}{I}^*(P)$. Lorsque P est belordonné, on sait, d'après le théorème de DE JONGH et PARIKH (cf. chapitre I), que P a une extension linéaire de type d'ordre maximum, ou de façon équivalente que $\underset{\sim}{I}(P)$ contient une chaîne dont le type d'ordre égale la hauteur et donc d'après le corollaire ci-dessus,

$$\operatorname{dev}(\underset{\sim}{I}^*(P)) = \operatorname{dev} h^*(\underset{\sim}{I}(P))$$

ce que l'on peut traduire par ceci :

I-2.1. THEOREME.

Soit P un ensemble belordonné,

$$K \dim P = \operatorname{Max}\{K \dim \overline{P}/\overline{P} \text{ est une extension linéaire de } P\} =$$

$$= \operatorname{Max}\{\beta \ / \ \omega^\beta < \underset{\sim}{I}(P)\}.$$

Notre travail va consister à étendre ce résultat. La méthode que nous emploierons nous conduira à une nouvelle preuve du théorème de DE JONGH et PARIKH.

N.B. Le lecteur doit sans doute penser qu'il est plus agréable de définir la notion duale de déviation, et les sections initiales au lieu des sections finales. Nous nous sommes conformés à l'usage. De toute façon, avec la notion qui va suivre ce type de considération est évacuée.

I-3. Déviation par rapport à une famille Γ de type d'ordre.

Soit Γ une famille de type d'ordre ; on se propose de mesurer à l'aide d'un ordinal, combien un ensemble ordonné P peut dévier de la classe des ensembles ordonnés qui n'abritent aucun de ces types d'ordre.

On va utiliser une notion semblable à celle du premier paragraphe. On écrira $dev_\Gamma P = \alpha$ lorsque P est dans la classe des ensembles ordonnés qui ont pour déviation α par rapport à Γ. (donc $dev_\Gamma P \neq \alpha$ ne signifie pas forcément que P a une déviation).

I-3.1. On définit la Γ-déviation de P par induction comme suit :

1°). $dev_\Gamma P = 0$ si aucun type γ de la famille Γ ne s'abrite dans P.

2°). Supposons définis les ensembles ordonnés de Γ-déviation inférieure à α, alors $dev_\Gamma P = \alpha$ si :

a). $dev_\Gamma P \nless \alpha$

b). pour tout γ de Γ et pour toute application croissante f de γ dans P, il existe $a,b \in \gamma$ tels que $a < b$ et $dev_\Gamma [f(a), f(b)] < \alpha$.

Avant de prouver que pour $\Gamma = \{\omega^*\}$ on retrouve la déviation classique commençons par caractériser les ensembles ordonnés qui ont une Γ-déviation. On supposera que les *types d'ordre de* Γ *ont tous au moins 3 éléments* (sinon $\emptyset$ et 1 sont les seuls ensembles pour lesquels la déviation peut être définie).

I-3.2. PROPOSITION.

Soit Γ une famille de types d'ordre. Si P est dispersé alors P a une Γ-déviation. La réciproque est vraie dès que Γ contient un type d'ordre dénombrable.

Pour la preuve on utilise le fait suivant :

I-3.3. LEMME.

Soient P et Q deux ensembles ordonnés. Si P a une Γ-déviation et Q est isomorphe à une partie de P ou image de P par une surjection croissante, alors Q a aussi une Γ-déviation et

$$\mathrm{dev}_\Gamma\, Q \leq \mathrm{dev}_\Gamma\, P.$$

La preuve est immédiate par induction sur $\mathrm{dev}_\Gamma\, P$. On revient à la preuve de la proposition :

Soit P un ensemble ordonné, supposons que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, et toute application croissante $f : \gamma \longrightarrow P$, il existe a,b dans γ tels que $a < b$ et $[f(a), f(b)]$ ait une Γ-déviation.

Soit $\alpha = \sup\{\mathrm{dev}_\Gamma\, [x,y] \,/\, x < y$ dans P et $[x,y]$ a une Γ-déviation$\}$. Nécessairement P a une Γ-déviation et $\mathrm{dev}_\Gamma\, P \leq \alpha+1$.

On en déduit que si P n'a pas de Γ-déviation alors il existe γ dans Γ et une application croissante $f : \gamma \longrightarrow P$ telle que pour tout $a < b$ dans P, $[f(a), f(b)]$ n'a pas de Γ-déviation. D'après le lemme ci-dessus $[f(a), \rightarrow)$ et $(\leftarrow f(b)]$ n'ont pas de Γ-déviation. Or $|\gamma| \geq 3$, donc il existe un élément de P, soit $x_{\frac{1}{2}}$, tel que $(\leftarrow x_{\frac{1}{2}}]$ et $[x_{\frac{1}{2}} \rightarrow)$ n'ont pas de Γ-déviation.

Soit $P_{\frac{1}{4}} = (\leftarrow x_{\frac{1}{2}}]$ et $P_{\frac{3}{4}} = [x_{\frac{1}{2}} \rightarrow)$. Pour la même raison il existe des éléments $x_{\frac{1}{4}}$ dans $P_{\frac{1}{4}}$ et $x_{\frac{3}{4}}$ dans $P_{\frac{3}{4}}$ tels que les ensembles : $(\leftarrow x_{\frac{1}{4}}]$ et $[x_{\frac{1}{4}} \rightarrow)$ de $P_{\frac{1}{4}}$ et les ensembles $(\leftarrow x_{\frac{3}{4}}]$ et $[x_{\frac{3}{4}} \rightarrow)$ de $P_{\frac{3}{4}}$, n'ont pas de déviation. De cette façon, on construit une chaîne dense dans P.

Pour la réciproque, supposons que Γ contienne un type d'ordre dénombrable. Si P n'est pas dispersé alors pour voir qu'il n'a pas de déviation il suffit, d'après le lemme I-3.3., de prouver qu'un ensemble isomorphe ou une de ses parties, par exemple η, n'en a pas.

Supposons que η ait une déviation. Soit $\mathrm{dev}_\Gamma\ \eta = \alpha$, et soit $\gamma \in \Gamma$ avec $|\gamma| < \aleph_0$. Comme $\gamma < \eta$ on devrait avoir $\alpha > 0$. Pour toute injection croissante f de γ dans η il devrait exister $a < b$ dans γ tels que $\mathrm{dev}[f(a), f(b)] < \alpha$, or $\eta < [f(a), f(b)]$ et donc d'après le lemme I-3.3. on aurait $\mathrm{dev}\ \eta < \alpha$. Contradiction.

Q.E.D.

Cette notion est bien une généralisation de la déviation classique, en effet :

I-3.4. PROPOSITION.

Soit α un ordinal ; pour tout ensemble ordonné P, on a $\mathrm{dev}_{\{\omega^*\}} P = \alpha$ si et seulement si $\mathrm{dev}\ P = \alpha$.

Preuve.

On la fait par induction sur α.

- si $\alpha = 0$ c'est la même définition.

- Supposons la propriété vraie pour tout $\beta < \alpha$ et considérons un ensemble ordonné P.

Supposons $\mathrm{dev}\ P = \alpha$.

D'après l'hypothèse d'induction on a $\mathrm{dev}_{\{\omega^*\}}\ P \not< \alpha$.

Soit $f : \omega^* \longrightarrow P$ une application croissante. Les images par f des éléments de ω^* constituent une suite décroissante $a_0 > a_1 > \dots > a_n > \dots$, or $\mathrm{dev}\ P = \alpha$, donc il existe un entier n, tel que $\mathrm{dev}[a_{n+1}, a_n] < \alpha$, d'où, d'après l'hypothèse d'induction, $\mathrm{dev}_{\{\omega^*\}}\ [a_{n+1}, a_n] < \alpha$. Ce qui nous donne

$\mathrm{dev}_{\{\omega^*\}}\ P = \alpha$.

Réciproquement, *supposons* $\mathrm{dev}_{\{\omega^*\}} P = \alpha$.

D'après l'hypothèse inductive on a $\mathrm{dev}\, P \not< \alpha$.

Prenons une suite $a_o > a_1 \ldots$ strictement décroissante.

Soit $I = \{i \ / \ \mathrm{dev}\, [a_{i+1}, a_i] < \alpha\}$.

I est nécessairement fini et donc $\mathrm{dev}\, P = \alpha$. En effet si I est infini soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ la bijection naturelle. Considérons la suite $(a_{\varphi(n)})_{n < \omega}$; Puisque $\mathrm{dev}_{\{\omega^*\}} P = \alpha$, il existe deux entiers m,n tels que :

$$\mathrm{dev}_{\{\omega^*\}} [a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(m)}] < \alpha.$$

D'après l'hypothèse d'induction, on a $\mathrm{dev}[a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(m)}] < \alpha$, donc :

$$\mathrm{dev}[a_{\varphi(m)+1}, a_{\varphi(m)}] < \alpha,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $\varphi(m) \in I$.

Q.E.D.

I-3.5. <u>Remarques.</u>

La Γ-déviation est toujours définie pour les ensembles ordonnés qui ne contiennent pas de sous-chaîne isomorphe à un type d'ordre de Γ, et leur déviation est nulle. Elle peut n'être définie que pour ceux-là. Par exemple, si $\Gamma = \{\eta\}$ les ensembles dispersés ont une déviation égale à 0 les autres n'en possèdent pas. On a la même propriété dès que l'on remplace η par une chaîne γ qui s'envoie dans chacune de ses sections moyennes $[x,y]$ avec $x < y$.

La relation entre les déviations associées à différentes familles de types d'ordre est donnée par la proposition suivante :

I-3.6. <u>PROPOSITION.</u>

Soient Γ et Γ' deux familles de types d'ordre. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i). $\forall \gamma \in \Gamma$, il existe $\gamma' \in \Gamma'$ tel que $\gamma' < \gamma$.

(ii). Pour tout ensemble ordonné P, si $dev_{\Gamma'} P$ existe alors $dev_\Gamma P$ existe et $dev_\Gamma P \leq dev_{\Gamma'} P$.

Preuve.

(i) ⇒ (ii). On la fait par induction sur $dev_{\Gamma'} P$.

- Si $dev_{\Gamma'} P = 0$ alors P n'abrite aucun $\gamma' \in \Gamma'$, et donc a fortiori aucun $\gamma \in \Gamma$ d'où $dev_\Gamma P = 0$.

- Supposons que $dev_{\Gamma'} P = \alpha$.

Soient $\gamma \in \Gamma$ et $f : \gamma \longrightarrow P$ une application croissante ; or il existe $\gamma' \in \Gamma'$ et une injection croissante $g : \gamma' \longrightarrow \gamma$.

L'application $f \circ g : \gamma' \longrightarrow P$ est croissante et, puisque $dev_{\Gamma'} P = \alpha$, il existe $a < b$ dans γ' tel que $dev_{\Gamma'} [f \circ g(a), f \circ g(b)] < \alpha$. D'après l'hypothèse d'induction $dev_\Gamma [f \circ g(a), f \circ g(b)] < \alpha$, d'où $dev_\Gamma P \leq \alpha$.

(ii) ⇒ (i). Soit $\gamma \in \Gamma$; si pour tout $\gamma' \in \Gamma'$ on a $\gamma' \not\leq \gamma$, alors $dev_{\Gamma'} \gamma = 0$. Il s'ensuit que $dev_\Gamma (\gamma) = 0$, ce qui est faux.

Q.E.D.

I-3.7. COROLLAIRE.

Deux familles de types d'ordre Γ et Γ' définissent la même notion de déviation si et seulement si elles engendrent la même section finale dans la classe des chaînes préordonnées par abritement.

CONSEQUENCE IMPORTANTE.

D'après le théorème de R.LAVER (cf. chapitre II) la classe des chaînes dénombrables est belordonnée, ce qui veut dire que toute section finale est engendrée par un nombre fini de types d'ordre.

En conséquence si on ne considère que les déviations associées à des familles de types d'ordre dénombrables on se limite à deux cas :

a). $\Gamma = \{\eta\}$ et là seuls les ensembles dispersés ont une déviation, et celle-ci est nulle.

b). Γ contient un nombre fini de types d'ordre dispersés, incomparables deux à deux pour l'abritement.

Le premier ne présente aucun intérêt. Les exemples les plus simples du second cas sont : $\Gamma = \{n\}$, $3 \leq n < \omega$, $\Gamma = \{\omega^*\}$, $\Gamma = \{\omega\}$ exemples correspondant respectivement à la notion usuelle et la notion duale, $\Gamma = \{\omega^*, \omega\}$. Ce dernier exemple sera traité en III-2..

I-4. Γ-dimension de KRULL.

Soit Γ une famille de types d'ordre (on rappelle qu'ils ont tous au moins 3 éléments). Etant donné un ensemble ordonné P, la Γ-*dimension* de KRULL de P, notée $K\ \dim_\Gamma P$, est la déviation de l'ensemble $\underset{\sim}{F}(P)$ des sections finales de P, ordonné par inclusion.

Pour $\Gamma = \{\omega^*\}$, on retrouve la notion de dimension de KRULL déjà introduite (proposition I-3.4.).

Tout comme la Γ-déviation, la Γ-dimension de KRULL n'est pas définie pour tous les ensembles ordonnés.

I-4.1. THEOREME.

Soit P un ensemble ordonné. Si P est dispersé sans antichaîne infinie, alors P a une Γ-dimension de KRULL.

La réciproque est vraie dès que Γ contient un type d'ordre dénombrable.

Preuve.

Ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition I-3.2. et du résultat classique suivant :

I-4.2. THEOREME (R.BONNET - M.POUZET [1]).

Soit P un ensemble ordonné. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i). P est dispersé sans antichaîne infinie

(ii). toute extension linéaire $\overline{P}$ de P est dispersée

(iii). $\underset{\sim}{F}(P)$ est dispersé.

I-4.3. COROLLAIRE.

Un ensemble ordonné a une dimension de KRULL si et seulement si il est dispersé sans antichaîne infinie.

II - LE RESULTAT PRINCIPAL.

II-1. Enoncé et principale conséquence.

Considérons une famille Γ de types d'ordre et un ensemble ordonné P possédant une Γ-dimension de KRULL. Si Q est une image surjective de P alors, comme toute surjection croissante de P sur Q induit un isomorpphisme de $\underset{\sim}{F}(Q)$ dans $\underset{\sim}{F}(P)$, l'ensemble Q a une Γ-dimension de KRULL et $K\dim_\Gamma Q \leq K\dim_\Gamma P$. Ceci s'applique en particulier lorsque Q est une extension linéaire de P. Et donc on a l'inégalité :

$$\sup\{K\dim_\Gamma \overline{P} \text{ où } \overline{P} \text{ est une extension linéaire de } P\} \leq K\dim_\Gamma P.$$

Nous ignorons si l'on a l'égalité pour une famille Γ arbitraire, toutefois notre principal résultat affirme que :

Cette égalité a lieu, et plus fortement le supremum est atteint, dès que chaque type d'ordre γ *de* Γ *est impartible* (ceci voulant dire que si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ alors $\gamma \leq \gamma_1$ ou $\gamma \leq \gamma_2$) *et dispersé, et* P *est lui-même dispersé sans antichaîne infinie.*

La preuve de ce résultat sera donnée en II-3. Donnons la principale conséquence.

II-1.1. THEOREME.

Soit Γ une famille de types d'ordre impartibles dénombrables. Pour tout ensemble ordonné P on a :

$K\ \dim_\Gamma P = \operatorname{Max}\{K\ \dim_\Gamma \overline{P}$ où $\overline{P}$ est une extension linéaire de $P\}$ dès que l'un des deux termes est défini.

Preuve.

- Supposons que Γ contienne un type équimorphe à η. Dans ce cas $K\ \dim_\Gamma P$ est défini si et seulement si P est dispersé sans antichaîne infinie, auquel cas $K\ \dim_\Gamma P = 0$. Le théorème est une reformulation du théorème I-4.2..

- Dans le cas contraire les éléments de Γ sont dispersés. Comme ils sont dénombrables, P a une Γ-dimension de KRULL si et seulement si il est dispersé sans antichaîne infinie et moyennant le théorème I-4.2. si et seulement si ses extensions linéaires sont dispersées, c'est-à-dire ont une Γ-dimension de KRULL. Le résultat mentionné ci-dessus donne l'égalité.

II-2. Les ingrédients.

La preuve du résultat utilise les faits suivants :

II-2.1. LEMME.

Soit Γ un ensemble de types d'ordre et soit P un ensemble ordonné. Si $\operatorname{dev}_\Gamma P = \alpha$ et $\alpha < \beta$ alors il existe x,y dans P tels que $\operatorname{dev}_\Gamma [x,y] = \beta$.

Preuve.

Par induction sur α :

- Si $\alpha = 0$ rien à démontrer. Si $\alpha \neq 0$ alors à chaque application croissante $f : \gamma \longrightarrow P$, $\gamma \in \Gamma$, on associe :

$$\operatorname{dev}_\Gamma f = \operatorname{Min}\{\operatorname{dev}_\Gamma [f(a), f(b)] \ / \ a < b\} + 1$$

On a nécessairement :

$dev_\Gamma\ P = \sup\{dev_\Gamma\ f$ où f parcourt les applications croissantes de γ dans P et γ les éléments de $\Gamma\}$.

- Si α est isolé, $\alpha = \alpha' + 1$, alors il existe f tel que $dev_\Gamma\ f = \alpha'$, donc il existe a,b tel que $dev_\Gamma\ [f(a), f(b)] = \alpha'$ dans ce cas si $\beta = \alpha'$ alors $x = f(a)$ et $y = f(b)$ conviennent,

si $\beta < \alpha'$ appliquer l'induction à $[f(a), f(b)]$.

- Si α est limite, alors comme $\beta < \alpha$, il existe f telle que $\beta < dev_\Gamma\ f < \alpha$ et on applique l'induction à $[f(a), f(b)]$ dont la déviation est $dev_\Gamma\ f$.

L'analyse de la preuve montre que la déviation peut se définir d'une façon analogue à la hauteur.

II-2.2. LEMME.

Soit Γ une famille de types d'ordre impartibles. Si P_1 et P_2 sont deux ensembles ordonnés non vides alors

$$dev_\Gamma\ P_1 \times P_2 = \mathrm{Max}\{dev_\Gamma\ P_1,\ dev_\Gamma\ P_2\}$$

dès que l'un des deux termes est défini.

Preuve.

Puisque P_1 et P_2 sont isomorphes à des sous-ensembles de $P_1 \times P_2$ on a : $\mathrm{Max}\{dev_\Gamma\ P_1\ ;\ dev_\Gamma\ P_2\} \leq dev_\Gamma\ P_1 \times P_2$.

Pour l'inégalité réciproque on montre par induction sur l'ordinal α que si $dev_\Gamma\ P_1 \leq \alpha$ et $dev_\Gamma\ P_2 \leq \alpha$ alors $dev_\Gamma\ P_1 \times P_2 \leq \alpha$: on suppose donc la propriété vraie pour tout α', $\alpha' < \alpha$. Soit $\gamma \in \Gamma$ et $f : \gamma \to P_1 \times P_2$ une application croissante. On doit prouver l'existence de deux éléments a,b de γ tels que $a < b$ et $dev_\Gamma\ [f(a), f(b)] < \alpha$.

Pour $i = 1,2$ soit f_i l'application croissante $p_i \circ f : \gamma \longrightarrow P_1 \times P_2 \longrightarrow P_i$, et soit $\sim_i$ la relation d'équivalence définie sur γ comme suit. Pour deux élément a,b de γ avec par exemple $a \prec b$, on pose $a \sim_i b$ s'il existe une suite finie $a = a_o \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n = b$ telle que :

$$\mathrm{dev}_\Gamma\ (f_i(a_k),\ f_i(a_{k+1})) < \alpha \quad \text{pour tout} \quad k = 0 \ldots n-1.$$

Les $\sim_i$-classes sont des intervalles. On va montrer qu'il en existe au moins deux associées respectivement à $\sim_1$ et $\sim_2$ dont l'intersection a au moins deux éléments. Pour cela on remarque d'abord que toute partie A de γ, isomorphe à γ, contient nécessairement deux éléments distincts équivalents modulo $\sim_i$ (en effet si l'on considère l'application $f_{i/A} : A \longrightarrow P_i$ alors, puisque $\mathrm{dev}_\Gamma P_i \prec \alpha$, on est sûr qu'il existe a et b dans A tels que $a < b$ et $\mathrm{dev}_\Gamma [f_i(a), f_i(b)] < \alpha$, et donc $a \sim_i b$).

Pour chaque entier p soit B_i^p la réunion de toutes les $\sim_i$-classes qui ont au plus p éléments. On peut ecrire B_i^p comme une réunion de p ensembles $C_i^{k,p}$, chacun contenant au plus un élément de chaque $\sim_i$-classe. D'après la remarque que l'on vient de faire, γ ne peut être isomorphe à une partie d'un $C_i^{k,p}$. Comme il est impartible il ne peut être isomorphe à une partie de B_i^p.

Soit $\gamma' = \gamma \setminus B_1^2$. Puisque γ est impartible et $\gamma \not\leq B_1^2$ on a donc $\gamma \prec \gamma'$. Le même raisonnement appliqué à γ' montre d'abord que $\gamma' \not\leq B_2'^p$ où $B_2'^p$ est la réunion des $\sim_2$-classes, définies sur γ', qui ont au plus p éléments. Il montre ensuite que $\gamma' \prec \gamma''$ où $\gamma'' = \gamma' \setminus B_2'^2$. En particulier une $\sim_2$-classe de γ' a au moins 3 éléments. Cette classe est contenue dans la réunion des $\sim_1$-classes de γ ayant au moins 3 éléments, et elle contient donc deux éléments a,b avec $a < b$, $a \sim_1 b$, $a \sim_2 b$.

Il existe donc deux suites finies $a_o = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ et $a'_o = a < a'_1 < \ldots < a'_m = b$ telles que $\mathrm{dev}_\Gamma\ (f_1(a_k),\ f_1(a_{k+1})) < \alpha$ et $\mathrm{dev}_\Gamma\ (f_2(a'_k),\ f_2(a'_{k+1})) < \alpha$, pour tout $k = 0 ,\ldots, n-1$.

Si l'on pose $C = \min(a_1, a_1')$, on obtient $\mathrm{dev}_\Gamma\,[f_1(a), f_1(c)]_{P_1} < \alpha$ et $\mathrm{dev}_\Gamma\,[f_2(a), f_2(c)]_{P_2} < \alpha$, d'où, d'après l'hypothèse d'induction,

$$\mathrm{dev}_\Gamma\,[f(a), f(c)] < \alpha.$$

Q.E.D.

En faisant $\alpha = 0$ on trouve la propriété suivante : <u>soit</u> γ <u>un type d'ordre impartible, alors pour toute paire d'ensembles ordonnés</u> P_1, P_2, $\gamma \prec P_1 \times P_2$ <u>équivaut à</u> $\gamma \prec P_1$ <u>ou</u> $\gamma \prec P_2$.

II-2.3. <u>LEMME</u>.

Soit Γ une famille de types d'ordre impartibles, et soit P un ensemble ordonné, réunion de deux sous-ensembles P_1 et P_2 munis de l'ordre induit, alors :

$$K\,\dim_\Gamma P = \mathrm{Max}\{K\,\dim_\Gamma P_1\ ;\ K\,\dim_\Gamma P_2\}$$

<u>Preuve</u>.

Soit $h_i : \underset{\sim}{F}(P_i) \longrightarrow \underset{\sim}{F}(P)$ l'application qui à tout $F \in \underset{\sim}{F}(P_i)$ associe $h_i(F) = \{y\ /\ y \in P$ et $x \prec y$, pour un certain x dans $F\}$.

L'application h_i est un isomorphisme de $\underset{\sim}{F}(P_i)$ sur son image donc $K\,\dim_\Gamma P_i \prec K\,\dim_\Gamma P$ d'où il s'ensuit : $\mathrm{Max}\{K\,\dim_\Gamma P_1, K\,\dim_\Gamma P_2\} \prec K\,\dim_\Gamma P$.

Soit φ la surjection naturelle de $P_1 \cup P_2$ sur P. On considère l'application duale $\underset{\sim}{F}_\varphi : \underset{\sim}{F}(P) \longrightarrow \underset{\sim}{F}(P_1 \cup P_2)$, qui à une section finale F de P, associe la section finale de $P_1 \cup P_2$ engendrée par $\varphi^{-1}(F)$.

$\underset{\sim}{F}_\varphi$ est un isomorphisme sur son image, d'où $\mathrm{dev}_\Gamma \underset{\sim}{F}(P) \prec \mathrm{dev}_\Gamma \underset{\sim}{F}(P_1 \cup P_2)$.
Or $\underset{\sim}{F}(P_1 \cup P_2)$ est isomorphe à $\underset{\sim}{F}(P_1) \times \underset{\sim}{F}(P_2)$ donc, d'après le lemme II-2.2., $\mathrm{dev}_\Gamma \underset{\sim}{F}(P) \prec \mathrm{Max}\{\mathrm{dev}_\Gamma \underset{\sim}{F}(P_1)\ ;\ \mathrm{dev}_\Gamma \underset{\sim}{F}(P_2)\}$ d'où :

$$K\,\dim_\Gamma P = \mathrm{Max}\{K\,\dim_\Gamma P_1\ ;\ K\,\dim_\Gamma P_2\}.$$

Q.E.D.

Un *idéal* I d'un ensemble ordonné P est une section initiale, filtrante supérieurement (i.e. pour tout $x,y \in I$ il existe $z \in I$ tels que $x,y < z$). La notion de filtre est définie dualement.

II-2.4. LEMME.

Soit P un ensemble ordonné ; P n'a pas d'antichaîne infinie si et seulement si *toute section initiale est réunion finie d'idéaux.*

Preuve.

La condition est suffisante puisqu'une section initiale engendrée par une antichaîne infinie ne peut être réunion finie d'idéaux.

Réciproquement, supposons d'abord que P est aussi bien fondé (i.e. belordonné). Alors $\underset{\sim}{I}(P)$ est bien fondé et un raisonnement inductif immédiat donne le résultat. Dans le cas général on utilise le fait que tout ensemble ordonné contient une partie cofinale bien fondée. Soit J une section initiale de P et P_J une partie cofinale de J bien fondé. Puisque P_J est en fait belordonné, $P_J = P_1 \cup \ldots \cup P_n$ où les P_i sont les idéaux de P_J. Les $(\leftarrow P_i]$ sont des idéaux dont la réunion est $P = (\leftarrow P_J]$.

Q.E.D.

L'énoncé est encore valable en remplaçant section initiale par section finale et idéal par filtre.

II-2.5. LEMME.

Soit Γ une famille de types d'ordre impartibles et soit P un ensemble ordonné sans antichaîne ininie. Si $K\,\dim_\Gamma P = \alpha$ alors il existe un idéal I et un filtre F dans P tels que :

$$K\,\dim_\Gamma I \cap F = \alpha.$$

Preuve.

On sait que $P = I_1 \cup I_2 \ldots \cup I_n$ où les I_i sont des idéaux. D'après le lemme II-2.3., $K\,\dim_\Gamma P = \underset{i=1,\ldots,n}{\mathrm{Max}} \{K\,\dim_\Gamma I_i\}$, donc

$K\ \dim_\Gamma P = K\ \dim_\Gamma I_k$, pour un certain k. De même I_k est réunion finie de filtres, soit $I_k = \bigcup_{1 \leq j \leq m} F_j$, donc $K\ \dim_\Gamma I_k = K\ \dim_\Gamma F_\ell$ pour un certain ℓ.

On prend alors $I = I_k$ et $F = [F_\ell \rightarrow)$.

Q.E.D.

Ce lemme nous permettra, dans la preuve du résultat principal de faire correspondre à chaque section initiale K et section finale I un idéal $I \subseteq K$ et un filtre $F \subseteq L$ tels que $K\ \dim_\Gamma K \cap L = K\ \dim_\Gamma I \cap F$.

II-2.6. <u>LEMME</u> (E.C.MILNER - M.POUZET [4]).

Soient P un ensemble dispersé sans antichaîne infinie et κ un cardinal régulier non dénombrable. Toute κ-suite d'idéaux contient une κ-sous-suite croissante ou décroissante.

Ce résultat a une preuve difficile que nous ne reproduirons pas. Nous l'utiliserons uniquement dans le cas où la Γ-dimension de KRULL a une cofinalité non dénombrable.

II-3. <u>Preuve</u>

Soit Γ une famille de types d'ordre impartibles dispersés et soit P un ensemble ordonné dispersé sans antichaîne infinie. Cet ensemble ordonné P a une Γ-dimension de KRULL ; montrer qu'il a une extension linéaire $\overline{P}$ de même Γ-dimension de KRULL équivaut à montrer que $\underset{\sim}{F}(P)$ contient une chaîne C telle que $\mathrm{dev}_\Gamma\ C = \mathrm{dev}_\Gamma\ \underset{\sim}{F}(P)$. En effet on sait, d'après un résultat de R.BONNET - M.POUZET (cf. chapitre I) qu'il y a correspondance biunivoque entre extensions linéaires $\overline{P}$ de P et chaînes maximales de $\underset{\sim}{F}(P)$ (celle-ci étant de la forme $\underset{\sim}{F}(\overline{P})$).

On montre par induction sur l'ordinal α que, pour tout ensemble ordonné P dispersé sans antichaîne infinie, si $\mathrm{dev}_\Gamma\ \underset{\sim}{F}(P) = \alpha$ alors $\underset{\sim}{F}(P)$ contient une chaîne C telle que $\mathrm{dev}_\Gamma C = \alpha$.

Pour $\alpha = 0$ le résultat est évident, n'importe quelle chaîne convient.

Pour $\alpha > 0$ on distingue deux cas.

1er cas.

α est un ordinal isolé, i.e. $\alpha = \beta + 1$.

Puisque $K \dim P = \beta + 1$, il existe $\gamma \in \Gamma$ et $f : \gamma \longrightarrow \underset{\sim}{F}(P)$ telle que $\mathrm{dev}_\Gamma [f(a), f(b)] \geq \beta$ dès que $a < b$ dans γ. D'après le lemme II-2.1. l'intervalle $[f(a), f(b)]$ contient un sous-intervalle $[X,Y]$ de Γ-déviation β, or un tel intervalle $[X,Y]$ étant isomorphe à $\underset{\sim}{F}(X \setminus Y)$ on peut lui appliquer l'hypothèse d'induction. Il existe donc une chaîne $C \subseteq [f(a), f(b)]$ de Γ-déviation au moins β. Pour tout $a \in \gamma$, qui admet un successeur a', soit C_a une chaîne d'extrémités $f(a), f(b)$ telle que $\mathrm{dev}_\Gamma C_a \geq \beta$. Si a n'a pas de successeur soit $C_a = \{f(a)\}$. L'ensemble $C = \bigcup_{a \in \gamma} C_a$ est une chaîne incluse dans $\underset{\sim}{F}(P)$ et contenant l'image de f.

La chaîne γ étant dispersée alors, pour tout $a, b \in \gamma$ avec $a < b$, il existe au moins deux éléments consécutifs $a', b' \in \gamma$ tels que

$$a \leq a' < b' \leq b.$$

Or $C_{a'} = [f(a'), f(b')]_C$ d'où $\mathrm{dev}_\Gamma [f(a'), f(b')]_C \geq \beta$ et donc $\mathrm{dev}\ [f(a), f(b)]_C \geq \beta$. Conclusion $\mathrm{dev}_\Gamma C = \alpha$.

2ème cas.

α est un ordinal limite. Soient $\mu = \mathrm{cf}(\alpha)$ et $(\alpha_i)_{i < \mu}$ telle que $\alpha = \sup_{i < \mu} \alpha_i$.

1er sous-cas.

$\mu = \omega$.

Soit $J = \{I,\ I \in \underset{\sim}{I}(P)$ et $K \dim_\Gamma I < \alpha\}$.

J est un idéal de $\underset{\sim}{I}(P)$. En effet si $I \in J$ et $J \subset I$ alors

$K\ \dim_\Gamma J < K\ \dim_\Gamma I$ d'où $J \in \mathcal{J}$. De plus d'après le lemme II-2.3., on a $K\ \dim_\Gamma I \cup J = \mathrm{Max}\{K\ \dim_\Gamma I,\ K\ \dim_\Gamma J\} < \alpha$ d'où $I \cup J \in \mathcal{J}$.

Soit $\alpha_{\mathcal{J}} = \sup\{K\ \dim_\Gamma I \ / \ I \in \mathcal{J}\}$.

- Si $\alpha_{\mathcal{J}} = \alpha$ alors il existe une suite $I_o, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ telle que $K\ \dim_\Gamma I_j \geq \alpha_j$. Avec le lemme II-2.3. on peut construire une suite strictement croissante $J_o \subsetneq J_1 \ldots \quad J_i \subsetneq J_{i+1} \subsetneq \ldots$ telle que :

$$\alpha > K\ \dim_\Gamma J_{i+1} > K\ \dim_\Gamma J_i \geq \alpha_i \quad \text{pour tout} \quad i < \omega.$$

On a $J_{i+1} = (J_{i+1} \ / \ J_i) \cup J_i$ donc, d'après le lemme II-2.3. :

$$\alpha > K\ \dim\ (J_{i+1} \ / \ J_i) > \alpha_i.$$

D'après l'hypothèse d'induction l'ensemble $(J_{i+1} \ / \ J_i)$ admet une extension linéaire soit L_i telle que $K\ \dim_\Gamma L_i > \alpha_i$. $L = \sum_{i<\omega} L_i$ est alors une extension linéaire de $J = \bigcup_{i<\omega} J_{i+1} \ / \ J_i$, avec $K\ \dim\ L = \alpha$. N'importe quelle extension linéaire $\overline{P}$ de P prolongeant L a une Γ-dimension de KRULL égale à α. La chaîne correspondante de $\underset{\sim}{F}(P)$ a une Γ-déviation α.

- Si $\alpha_{\mathcal{J}} < \alpha$ soit alors i_o le plus petit entier tel que $\alpha_{i_o} < \alpha_{\mathcal{J}}$. Puisque $K\ \dim_\Gamma P = \alpha$ il existe, d'après le lemme II-2.1. deux sections finales F_o, F_1 telles que $\mathrm{dev}_\Gamma\ [F_o, F_1] = \alpha_{i_o}$. Or $[F_o, F_1]$ est isomorphe à $F(F_1 \setminus F_o)$ donc $K\ \dim_\Gamma F_1 \setminus F_o = \alpha_{i_o}$. Soit $I_o = P \setminus F_o$, puisque cet ensemble contient $F_1 \setminus F_o$ on a $\alpha_{i_o} = K\ \dim_\Gamma F_1 \setminus F_o \leq K\ \dim\ I_o$. Donc $I_o \notin \mathcal{J}$, i.e. $K\ \dim\ I_o = \alpha$. Soit $I_1 = P \setminus F_1$ on a $I_o = I_1 \cup (F_1 \setminus F_o)$ donc, d'après le lemme II-2.3., $K\ \dim_\Gamma I_1 = \alpha$. En continuant cette construction on obtient une suite strictement décroissante de sections initiales $I_o \supsetneq I_1 \supsetneq \ldots \supsetneq I_n \supsetneq \ldots$ telle que $K\ \dim_\Gamma I_{n+1} \setminus I_n = \alpha_{i_o+n}$. D'après l'hypothèse d'induction on a pour chaque n une extension L_n de $I_{n+1} \setminus I_n$ telle que $K\ \dim_\Gamma L_n = \alpha_{i_o+n}$.

Il s'ensuit que $L = \sum^*_{n<\omega} L_n$ est une extension linéaire de $I_o \setminus \bigcap_{n<\omega} I_n$ telle que $K\ \dim_\Gamma L = \alpha$. Son prolongement en une extension linéaire $\overline{P}$ de P

tout entier a une Γ-dimension de KRULL égale à α.

2ème sous-cas.

$\mu > \omega$.

D'après le lemme II-2.1. et II-2.5. on peut pour chaque $i < \mu$ trouver un idéal I_i et un filtre F_i tels que $K\ \dim_\Gamma I_i \cap F_i = \alpha_i$. En appliquant deux fois le lemme II-2.6. on peut trouver une partie $M \subseteq \mu$, $|M| = \mu$ telle que les sous-suites $(J_i)_{i \in M}$ et $(F_i)_{i \in M}$ soient monotones.

Ces deux suites ne peuvent être toutes les deux décroissantes :

- supposons par exemple que $(I_i)_{i \in M}$ est décroissante, $(F_i)_{i \in M}$ est croissante. On a $F_{i+1} \cap I_{i+1} \subseteq (F_{i+1} / F_i) \cup (F_i \cap I_i)$, d'où

$$K\ \dim_\Gamma (F_{i+1} / F_i) \cup (F_i \cap I_i) \geq \alpha_{i+1}$$

et puisque $K\ \dim_\Gamma (F_i \cap I_i) = \alpha_i$, on a alors $K\ \dim_\Gamma F_{i+1} / F_i \geq \alpha_{i+1}$.
Soit $L(F_{i+1} / F_i)$ une extension linéaire de F_{i+1} / F_i, telle que $K\ \dim_\Gamma L(F_{i+1} / F_i) \geq \alpha_{i+1}$ (une telle extension linéaire existe d'après le lemme II-2.1. et l'hypothèse inductive).

Alors $L = \sum^*_{i \in M} L(F_{i+1} / F_i)$ est une extension linéaire de $\bigcup_{i \in M} F_{i+1} / F_i$, avec $K\ \dim_\Gamma L = \alpha$ ce qui donne le résultat.

Le cas symétrique se traite de même.

- Supposons maintenant que $(I_i)_{i \in M}$ et $(F_i)_{i \in M}$ sont, toutes les deux, des suites croissantes. Dans ce cas :

$$I_{i+1} \cap F_{i+1} = (I_i \cap F_i) \cup (F_{i+1} \setminus F_i) \cup (I_{i+1} / I_i).$$

Puisque $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ on a, d'après le lemme II-2.3. $K\ \dim F_{i+1} \setminus F_i = \alpha_{i+1}$ ou $K\ \dim(I_{i+1} / I_i) = \alpha_{i+1}$.

μ étant impartible, il existe $N \subset M$, tel que $|N| = \mu$ et par exemple, $K\ \dim_\Gamma (I_{i+1} / I_i) = \alpha_{i+1}$ pour tout $i \in N$.

Pour tout $i \in N$, soit L_i une extension linéaire de I_{i+1} / I_i telle que

$$K \dim_\Gamma L_i = \alpha_{i+1}.$$

$L = \sum_{i \in N} L_i$ est une extension linéaire de $\bigcup_{i \in N} I_{i+1} / I_i$, avec $K \dim_\Gamma L = \alpha$. Ceci donne le résultat.

Q.E.D.

III - APPLICATIONS.

III-1. Dimension de KRULL usuelle.

Lorsque Γ est égal à $\{\omega^*\}$ et P est belordonné, le théorème redonne facilement deux résultats connus : le théorème de DE JONGH et PARIKH, déjà cité, et la valeur de la dimension de KRULL d'un produit de deux ensembles belordonnés, obtenue par J.C.ROBSON [6].

Pour le premier résultat nous utiliserons les faits suivants :

III-1.1. LEMME.

Soient P un ensemble belordonné et A,B deux sections initiales de P, alors :

$$h(A, \underset{\sim}{I}(P)) + h(B \setminus A, \underset{\sim}{I}(P \setminus A)) \leqslant h(A \cup B, \underset{\sim}{I}(P)) \leqslant$$
$$\leqslant h(A, \underset{\sim}{I}(P)) \oplus h(B \setminus A, \underset{\sim}{I}(P \setminus A)).$$

Preuve.

Pour la première inégalité raisonner par induction sur $B \setminus A$ (en supposant que l'inégalité a lieu pour toutes les sections initiales B', $B' \subset B$ telles que $B' \setminus A \neq B \setminus A$).

Pour la seconde, considérer l'application $\varphi : \underset{\sim}{I}(P) \longrightarrow \underset{\sim}{I}(P) \times \underset{\sim}{I}(P \smallsetminus A)$ définie par $\varphi(J) = (J \cap A, J \smallsetminus A)$ et appliquer le a) de la proposition I-2.2.. Chapitre I.

III-1.2. LEMME.

Soit P un ensemble belordonné. Si $h(P, \underset{\sim}{I}(P)) = \omega^{\alpha}$ alors $K \dim P = \alpha$.

Preuve.

On raisonne par induction sur α.

Soit $\beta = K \dim P$. D'après la proposition I-1.1. $\beta \leqslant \alpha$. Supposons $\beta < \alpha$. Soit I_o une section initiale telle que $h(I_o, \underset{\sim}{I}(P)) = \omega^{\beta}$; posons $F_o = P \smallsetminus I_o$. D'après le lemme précédent $h(F_o, \underset{\sim}{I}(F_o)) = \omega^{\alpha}$. Soit alors J une section initiale de F_o telle que $h(J, \underset{\sim}{I}(F_o)) = \omega^{\beta}$; posons $F_1 = F_o \smallsetminus J$. En continuant la procédure on obtient une suite strictement décroissante de sections finales $F_o \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n, \ldots$ telle que $h(F_n \smallsetminus F_{n+1}, \underset{\sim}{I}(F_n)) = \omega^{\beta}$ pour tout n. D'après l'hypothèse inductive $K \dim F_n \smallsetminus F_{n+1} = \beta$, c'est-à-dire que $\operatorname{dev} \underset{\sim}{F}(F_n \smallsetminus F_{n+1}) = \beta$. Or $\underset{\sim}{F}(F_n \smallsetminus F_{n+1})$ est isomorphe à l'intervalle $[F_{n+1}, F_n]$ de $\underset{\sim}{F}(P)$. On a donc une suite décroissante $(F_n)_n$ telle que tous les intervalles successifs aient déviation β. Il s'ensuit que :

$$\operatorname{dev} \underset{\sim}{F}(P) > \beta \quad \text{contradiction.}$$

Q.E.D.

III-1.3. THEOREME.

Soit P un ensemble belordonné ; $\underset{\sim}{I}(P)$ contient une chaîne de type égal à $h(\underset{\sim}{I}(P))$.

Preuve.

On raisonne par induction sur $\alpha = h(P, \underset{\sim}{I}(P))$.

Ecrivons $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_k}$ avec $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \ldots \geqslant \alpha_k \geqslant 0$. Si $k \geqslant 2$, soit

I une section initiale telle que $h(I, \underset{\sim}{I}(P)) = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_{k-1}}$. D'après le lemme II-1.1., $h(P \setminus I, \underset{\sim}{I}(P \setminus I)) = \omega^{\alpha_k}$. Donc d'après l'hypothèse d'induction $\underset{\sim}{I}(I)$ contient une chaîne de type $\omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_{k-1}} + 1$ et $\underset{\sim}{I}(P \setminus I)$ une chaîne de type $\omega^{\alpha_k} + 1$. Donc $I(P)$ contient une chaîne de type $\alpha + 1$.
Si $k = 1$ alors $h(P, \underset{\sim}{I}(P)) = \omega^{\alpha_1}$. Dans ce cas, et d'après le lemme III-1.2. K dim P = α_1. D'après le théorème principal il existe une extension linéaire $\overline{P}$ de P telle que K dim P = α_1, c'est-à-dire telle que :

$$\text{dev } \underset{\sim}{F}(\overline{P}) = \alpha_1 .$$

Or $\underset{\sim}{F}(P)$ est une chaîne anti-bien ordonnée donc $(\omega^{\alpha_1})^* \prec \underset{\sim}{F}(\overline{P})$. Il en résulte $\omega^{\alpha_1} \prec \underset{\sim}{I}(P)$. Et donc $\underset{\sim}{I}(P)$ contient une chaîne de type $\alpha + 1$.

Q.E.D.

C'est la version équivalente du théorème de JONGH et PARIKH.

Pour le second résultat rappelons d'abord la définition du produit hessenbergien d'ordinaux. Celui-ci est défini ainsi : on écrit les ordinaux comme des polynômes en les ω^α et on fait leur produit comme le produit de polynômes usuels. Pour cela il suffit de définir le produit hessenbergien des ω^α. On pose tout simplement $\omega^\alpha \otimes \omega^\beta = \omega^{\alpha \oplus \beta}$.

Formellement soient α, β deux ordinaux s'écrivant sous forme normale comme suit : $\alpha = \sum_\gamma \omega^\gamma n_\gamma$ et $\beta = \sum_\gamma \omega^\gamma m_\gamma$. Le produit hessenbergien $\alpha \otimes \beta$ vaut : $\alpha \otimes \beta = \sum \omega^\gamma m_\gamma$ où $m_\gamma = \sum_{\gamma = \mu \oplus \lambda} n_\mu \cdot m_\lambda$

Exemples.

$$(\omega^{\omega^2} + \omega 3) \otimes \omega^\omega = \omega^{\omega^2 + \omega} + \omega^{\omega+1} 3 .$$

Rappelons un résultat de DE JONGH et PARIKH [2] que nous formulons en termes de hauteur.

III-1.4. THEOREME.

Soient P et Q deux ensembles belordonnés.

$h(P \times Q, \underset{\sim}{I}(P \times Q)) = h(P, \underset{\sim}{I}(P)) \otimes h(Q, \underset{\sim}{I}(Q))$.

L'énoncé donné ci-dessus présente une version équivalente à l'écriture initiale du théorème.

Voici le résultat de J.C.ROBSON :

III-1.5. THEOREME.

Soient P et Q deux ensembles belordonnés.

$K \dim(P \times Q) = K \dim P \oplus K \dim Q$.

Preuve.

Soient $\alpha = h(P, \underset{\sim}{I}(P))$ et $\beta = h(Q, \underset{\sim}{I}(Q))$ avec $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_k}$ et $\beta = \omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_\ell}$. On a donc $K \dim P = \alpha_1$ et $K \dim Q = \beta_1$. Or $h(P \times Q, \underset{\sim}{I}(P \times Q)) = \alpha \otimes \beta$ et, lorsque l'on effectue le produit $\alpha \otimes \beta$, le terme de plus haut "degré" est $\alpha_1 \oplus \beta_1$, donc :

$$K \dim P \times Q = \alpha_1 \oplus \beta_1.$$

Q.E.D.

III-2. Rang topologique et $\{\omega,\omega^*\}$-déviation.

Un deuxième cas de Γ-déviation est particulièrement intéressant, celui de la $\{\omega,\omega^*\}$-déviation.

Pour les ensembles ordonnés sans suite strictement croissante, la $\{\omega,\omega^*\}$--déviation coïncide avec la déviation usuelle, ce qui n'est pas le cas pour d'autres ensembles ordonnés, comme par exemple les ensembles sans suite strictement décroissante où la déviation usuelle vaut 0 et la $\{\omega,\omega^*\}$-déviation coïncide avec la $\{\omega\}$-déviation.

La $\{\omega,\omega^*\}$-déviation des chaînes est particulièrement simple à calculer : les chaînes qui ont une $\{\omega,\omega^*\}$-déviation égale à zéro sont les chaînes finies. Les chaînes $(\omega^* + \omega)$; $(\omega^+ + \omega).2$,..., $(\omega^* + \omega).n$,... et leurs sous-chaînes infinies sont celles de $\{\omega,\omega^*\}$-déviation 1.

Ceci suggère un rapport entre la notion de $\{\omega,\omega^*\}$-déviation et une autre notion connue : "l'équivalence finie".

Soit C une chaîne. Pour chaque ordinal α on définit, par induction sur α, la relation d'équivalence $\equiv_\alpha$ sur C comme ci-dessous et on note C_α le quotient $C/_{\equiv_\alpha}$.

a). $\equiv_o$ est l'égalité sur C.

b). Supposons que $\equiv_\beta$ est définie pour tout $\beta < \alpha$.

- *Si* α *est limite,* on pose $x \equiv_\alpha y$ si et seulement si $x \equiv_\beta y$ pour un certain $\beta < \alpha$.

- *Si* $\alpha = \alpha' + 1$, on pose $x \equiv_\alpha y$ si et seulement si l'intervalle $[\,\overline{x},\overline{y}\,]$ est fini dans $C_{\alpha'}$, $\overline{x}$ et $\overline{y}$ étant les images respectives de x et y dans $C_{\alpha'}$ par la surjection canonique de C sur $C_{\alpha'}$. Par exemple $\equiv_1$ est la "relation d'équivalence finie". Ses classes d'équivalence sont des intervalles de C dont les types d'ordre sont n, ω, ω^* ou $\omega^* + \omega$. D'une façon générale les classes d'équivalence de $\equiv_\alpha$ sont des intervalles de C, et donc C peut s'écrire comme somme lexicographique indexée par C_α de ses classes d'équivalence modulo $\equiv_\alpha$. Ces relations d'équivalence sont fréquemment utilisées pour l'étude des chaînes et précisément des classes dispersées. *En effet une chaîne* C *est dispersée si et seulement si* C_α *est fini pour un certain ordinal* α. D'après ce que nous avons vu (théorème I-4.1.) ceci équivaut encore à dire que la $\{\omega,\omega^*\}$-déviation est définie.

La relation entre ces notions est la suivante :

III-2.1. PROPOSITION.

La $\{\omega,\omega^*\}$-déviation d'une chaîne C est le plus petit ordinal α tel que C_α est fini.

Preuve.

On montre par induction sur l'ordinal α que $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}}\, C = \alpha$ si et seulement si α est le plus petit ordinal pour lequel C_α est fini.

Pour $\alpha = 0$ c'est clair : C est une chaîne finie.

Soit $\alpha > 0$. Supposons que $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}}\, C = \alpha$. Si C_α est infini, alors nécessairement C_α contient ω ou ω^*. Supposons par exemple que $\omega \prec C_\alpha$. Soit alors $a_o < a_1 \ldots < a_n \ldots$ une suite croissante d'éléments de C dont les images respectives dans C_α sont distinctes. Puisque $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}}\, C = \alpha$ il existe n,m tel que $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}}\, [a_n , a_m] < \alpha$. D'où, d'après l'hypothèse d'induction, il existe $\beta < \alpha$ pour lequel $[a_n , a_m]_\beta$ est fini. On a donc $a_n \equiv_{\beta+1} a_m$ et a fortiori $a_n \equiv_\alpha a_m$. Contradiction.

Réciproquement supposons que C_α est finie et C_β infinie pour tout $\beta < \alpha$. Considérons par exemple une suite décroissante d'éléments de C.
Soit $a_o > a_1 \ldots > a_n \ldots$. Puisque C_α est fini, une infinité d'éléments de cette suite est dans la même classe modulo $\equiv_\alpha$. Soient a_i , a_j avec $a_i < a_j$ deux tels éléments.

- *Si* α *est limite*, alors $a_i \equiv_\beta a_j$ pour un certain $\beta < \alpha$. Donc $[a_i , a_j]_\beta$ a un seul élément, d'où, d'après l'hypothèse d'induction,

$$\mathrm{dev}_{\{\omega^* , \omega\}}\, [a_i , a_j] \prec \beta < \alpha.$$

- *Si* α *est isolé*, i.e. $\alpha = \alpha' + 1$, $[a_i , a_j]_{\alpha'}$ est fini d'où, de même, $\mathrm{dev}_{\{\omega^*,\omega\}}[a_i , a_j] \prec \alpha' < \alpha$. Il s'ensuit que $\mathrm{dev}_{\{\omega^* , \omega\}}\, C \prec \alpha$.

Conclusion : $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}}\, C = \alpha$.

. <u>Le procédé de réduction de CANTOR-BENDIXON</u>.

Soit X un espace topologique. Le procédé de réduction de CANTOR-BENDIXON consiste à associer à chaque ordinal α le $\alpha^{\text{ième}}$ *dérivé* de X, défini par induction comme suit :

- $X^{(0)} = X$

- $X^{(\alpha)} = X^{(\beta)} \setminus \{\text{points isolés dans } X^{(\beta)}\}$ si $\alpha = \beta + 1$

- $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} X^{(\beta)}$ si α est limite.

Le *rang* de CANTOR-BENDIXON de X, noté $\mathrm{rg}\, X$, est le plus petit ordinal α tel que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$.

L'espace X est dit *clairsemé* ou topologiquement *dispersé* si $X^{(\alpha)} = \emptyset$ pour un certain ordinal α. Ceci équivaut à dire que toute partie F contient au moins un point isolé pour la topologie induite. Si en plus X est compact alors son rang est un ordinal isolé.

Considérons maintenant une chaine κ que l'on munit de la topologie des intervalles (i.e. une base d'ouverts est constituée par les sections moyennes ouvertes $]a,b[$ où a et b parcourent κ).

La première relation entre ordre et topologie est la suivante (F.HAUSDORFF). La chaîne κ est compacte si et seulement si elle est complète pour l'ordre.

Une chaîne dispersée (pour l'ordre) est clairsemée ; la réciproque est fausse (considérer n'importe quelle chaîne discrète, par exemple $(\omega^* + \omega).\eta$). Par contre :

III-2.2. <u>PROPOSITION</u>.

Pour une chaîne complète κ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i). κ est clairsemé,

(ii). κ est dispersé

(iii). κ est isomorphe à $\underset{\sim}{I}(C)$ où C est une chaîne dispersée.

Ceci est bien classique, donnons-en néammoins une preuve :

(iii) $\Rightarrow$ (ii).

Supposons $\underset{\sim}{I}(C)$ non dispersé, i.e. $\eta \leqslant \underset{\sim}{I}(C)$. Puisque $2\eta \leqslant \eta$ on peut construire une chaîne $(I_{r,i})_{\substack{r \in \eta \\ i=1,2}}$ de sections initiales ordonnées suivant l'ordre lexicographique des indices. A chaque $r \in \eta$, on associe un élément x_r de $I_{r,2} \setminus I_{r,1}$. L'ensemble des x_r est une sous-chaîne de C de type η.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Une chaîne est dispersée si et seulement si toute sous-chaîne d'au moins deux éléments, contient deux éléments consécutifs, i.e. deux éléments distincts a et b tels que $]a,b[= \emptyset$. Une telle condition implique facilement que chaque partie ayant plus de trois éléments, contient trois éléments consécutifs $a < b < c$. L'élément médian b est isolé.

(i) $\Rightarrow$ (iii).

Un élément x est dit sup-complètement irréductible (ou $\vee$-irréductible) si pour toute partie X, $x = \sup X$ implique $x \in X$.

Soit C l'ensemble des éléments $\vee$-irréductibles de κ et soit φ l'application de $\underset{\sim}{I}(C)$ dans κ définie par $\varphi(J) = \vee\, J$. Cette application est injective et croissante. Si elle n'est pas surjective il existe x tel que $y = \vee\, \{z \,/\, z \in C$ et $z < x\} \neq x$. Si $]y,x[$ est vide, alors x est irréductible ; sinon, comme κ est dispersé $]y,x[$ contient deux éléments successifs, donc un irréductible. Contradiction.

Supposant que C contienne une sous-chaîne D isomorphe à η on considère $\mathcal{J}$ l'ensemble des sections initiales I de C telles que pour tout x dans $C \setminus I$, il existe $y \in (C \setminus I) \cap D$, avec $y < x$. L'ensemble $\mathcal{J}$ est non vide et sans point isolé. Ce qui contredit le fait que $K \cong I(C)$ est clairsemé.

Q.E.D.

Dans le cas des chaînes on a la relation suivante entre $\{\omega,\omega^*\}$-déviation et rang topologique :

III-2.3. PROPOSITION.

Soit C une chaîne dispersée.

$\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} C = \mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} \underset{\sim}{I}(C) = \mathrm{rang}\ \underset{\sim}{I}(C) - 1.$

Preuve.

1°). $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} C = \mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} \underset{\sim}{I}(C)$.

Puisque C est isomorphe à une partie de $\underset{\sim}{I}(C)$, il est clair que :

$$\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} C \leqslant \mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} \underset{\sim}{I}(C).$$

Pour l'inégalité réciproque, on prouve par induction sur α que si $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} C \leqslant \alpha$ alors $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} \underset{\sim}{I}(C) \leqslant \alpha$.

- si $\alpha = 0$ le résultat est évident puisque si C est finie alors $\underset{\sim}{I}(C)$ l'est aussi.

- si $\alpha > 0$, on considère une suite strictement croissante $I_o, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ de sections initiales. Pour chaque entier n, on choisit $x_n \in I_{2n+1} \setminus I_{2n}$. Puisque $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} C \leqslant \alpha$ il existe deux entiers n et m tels que $n < m$ et $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} [x_n, x_m] < \alpha$, donc :

$$\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} I_{2m} \setminus I_{2n+1} < \alpha.$$

D'après l'hypothèse d'induction, $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} \underset{\sim}{I}(I_{2m} \setminus I_{2n+1}) < \alpha$.
Comme $\underset{\sim}{I}(I_{2m} / I_{2n+1})$ est isomorphe à l'intervalle $[I_{2n+1}, I_{2m}]$, il s'ensuit $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} [I_{2m}, I_{2n+1}] < \alpha$. Le même argument s'applique à une suite décroissante de sections initiales. Par conséquent $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} \underset{\sim}{I}(C) \leqslant \alpha$.

2°). $\mathrm{dev}_{\{\omega,\omega^*\}} C = \mathrm{rg}\ \underset{\sim}{I}(C) - 1$.

D'après la proposition III-2.1. il suffit de prouver que $\mathrm{rg}\ \underset{\sim}{I}(C) - 1$ est égal au plus petit ordinal α, tel que C_α est fini. C'est une conséquence immédiate du fait suivant :

Soit φ *la surjection canonique de* C *sur* $C_\alpha = C/_{\equiv_\alpha}$ *et soit* $\underset{\sim}{I}_\varphi : \underset{\sim}{I}(C_\alpha) \longrightarrow \underset{\sim}{I}(C)$ *l'application duale* (définie par $\underset{\sim}{I}_\varphi(J) = \varphi^{-1}(J)$, pour toute section initiale J de C_α). *Alors* $\underset{\sim}{I}_\varphi$ *est un isomorphisme de* $\underset{\sim}{I}(C_\alpha)$ *dans* $(\underset{\sim}{I}(C))^{(\alpha)} \cup \{\emptyset, C\}$. Celui-ci s'obtient directement par induction sur α. Le cas $\alpha = 0$ est évident. Pour le cas $\alpha = 1$, soit I une section initiale limite différente de $\emptyset$ et de C. Nécessairement, pour tout $x \in I$ et $y \in C/I$, la section moyenne $[x,y]$ est infinie.

Donc $(I(C))^{(1)} \cup \{\emptyset, C\}$ est exactement l'ensemble des sections initiales, unions de $\equiv_1$ classes de C.

Pour $\alpha > 1$, on se ramène au cas $\alpha = 1$ en observant que C_α est obtenue en itérant α fois, l'équivalence $\equiv_1$. (par exemple $C_2 = C_{1/_{\equiv_1}}$).

Q.E.D.

III-2.4. <u>THEOREME</u>.

Si l'ensemble $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales d'un ensemble ordonné P est clairsemé, alors parmi les chaînes maximales de $\underset{\sim}{I}(P)$ l'une d'elles a un rang topologique maximum.

<u>Preuve</u>.

Puisque $\underset{\sim}{I}(P)$ est clairsemé ses chaînes et donc ses chaînes maximales sont clairsemées. Comme celles-ci sont de la forme $\underset{\sim}{I}(\overline{P})$, où $\overline{P}$ est une extension linéaire, elles sont dispersées (III-2.2.) et donc $\underset{\sim}{I}(P)$ est dispersé. (En fait comme l'a indiqué M.POUZET, la réciproque est vraie) voir aussi [5]. Il a donc une $\{\omega^*, \omega\}$-déviation. Or d'après le théorème II-1.1. il existe une chaîne maximale, nécessairement de la forme $\underset{\sim}{I}(\overline{P})$, de $\{\omega^*, \omega\}$-déviation maximum. Son rang est donc maximum.

<u>Remarque finale</u>.

Le rang maximum peut être différent du rang de $\underset{\sim}{I}(P)$.

BIBLIOGRAPHIE,

[1]- R.BONNET - M.POUZET :

Linear extensions of ordered sets,

Ordered Sets, I.RIVAL (Ed.), p.125-170 ; REIDEL C^{ie}.

[2]. D.H.J. DE JONGH - R.PARIKH :

Well partial ordering and hierarchies,

Indagationes Mathematicae, (1977), Vol.39, p.195-206.

[3]. P.GABRIEL- R. RENTSCHLER :

Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés,

C.R.A.S., PARIS, 265, (1967), p.712-715.

[4]. E.C.MILNER- M.POUZET :

The ERDOS-DUSHNIK-MILLER theorem for topological graphs and orders,

Preliminary report, Juin 1983.

[5]. M.MILSOVE :

When are ordered scattered and topologically scattered the same ?

Actes de la Conference sur les Ensembles Ordonnés et leurs Applications (Château de la Tourette, l'ARBRESLE, juillet 1982), Annals of Discrete Math., NORTH-HOLLAND 1984.

[6]. J.C.ROBSON :

Well quasi-ordered sets and ideals in free semi-groups and Algebras,

Journal of Algebra, 55, (1978), p.521-535.