

E. COMBET

2- I Inégalités faibles de Morse

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 21-32

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984__3B_A3_0

© Université de Lyon, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INEGALITES FAIBLES DE MORSE

On commence par rappeler les formules de calcul sur une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n (section A) ; ensuite on applique ces formules aux perturbations du laplacien provoquées par la donnée d'une fonction $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ (section B) et, suivant E. Witten, on en déduit les inégalités faibles de Morse (section C).

A. RAPPELS DE CALCUL RIEMANNIEN.

Pour simplifier on supposera que M est orientée.

On note $\Lambda^p T^*(M)$ le fibré vectoriel des p -formes alternées sur M , avec $0 \leq p \leq n$. On considère aussi les p -formes complexes $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$. On note ω la n -forme volume riemannien sur M :

$$\omega_x = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

où (e_1, \dots, e_n) est une base quelconque orthonormée directe de $T_x^*(M)$.

Le produit scalaire défini par g sur $T(M)$ et $T^*(M)$ s'étend aux fibrés $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ en posant :

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_p) = \sum_{\pi} \varepsilon(\pi) (v_1, w_{\pi(1)}) \dots (v_p, w_{\pi(p)})$$

où la somme porte sur toutes les permutations π de la suite $(1, \dots, p)$.

On en déduit un isomorphisme

$$* : \Lambda^p T_x^*(M) \otimes \mathbb{C} \simeq \Lambda^{n-p} T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$$

tel que l'on ait, pour λ et $\mu \in \Lambda^p T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$:

$$\lambda \wedge (*\mu) = (\lambda, \mu) \omega_x$$

Sur le fibré $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ on a :

$$** = (-1)^{p(n-p)} .$$

On note \langle , \rangle le produit hermitien naturel sur les sections $C^\infty(\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C})$:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M (\phi, \psi)_x \omega_x .$$

On note $d : C^\infty(\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1} T^*(M) \otimes \mathbb{C})$ la dérivation extérieure et d^* l'opération adjointe pour le produit hermitien précédent.

Pour ϕ de degré $p-1$, ψ de degré p on obtient, d'après la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M d(\phi \wedge (*\psi)) \\ &= \int_M d\phi \wedge (*\psi) + (-1)^{p-1} \int_M \phi \wedge d(*\psi) \\ &= \langle d\phi, \psi \rangle + (-1)^{(p-1)} (-1)^{(n-p+1)} (-1)^{(p-1)} \int_M \phi \wedge ** d(*\psi) \\ &= \langle d\phi, \psi \rangle - \langle \phi, (-1)^{(p-1)} (-1)^{(n-p+1)} * d * (-1)^p \psi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$d_p^* = (-1)^{(p-1)} (-1)^{(n-p+1)} * d * (-1)^p.$$

Etant donnée $v \in T_x^*(M)$ on définit le produit intérieur :

$$i_v : \Lambda^p T_x^*(M) \rightarrow \Lambda^{p-1} T_x^*(M)$$

en posant :

$$i_v(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} (v, e_j) e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_j \wedge \dots \wedge e_p.$$

Pour λ de degré $p-1$ et μ de degré p , on obtient (en utilisant une base orthonormée) :

$$(v \wedge \lambda, \mu) = (\lambda, i_v(\mu))$$

d'où l'on déduit, pour des sections ϕ et ψ :

$$(1) \quad \langle v \wedge \phi, \psi \rangle = \langle \phi, i_v(\psi) \rangle ;$$

enfin, pour $f \in C^\infty(M)$ réelle on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi, d^*(f\psi) \rangle &= \langle d\phi, f\psi \rangle \\ &= \langle fd\phi, \psi \rangle \\ &= \langle d(f\phi), \psi \rangle - \langle df \wedge \phi, \psi \rangle \\ &= \langle \phi, fd^*\psi \rangle - \langle \phi, i_{df}\psi \rangle \end{aligned}$$

et ainsi :

$$(2) \quad d^*(f\psi) = fd^*\psi - i_{df}\psi.$$

Nous utiliserons aussi dans la section suivante des formules à indices bien connues en géométrie riemannienne [10]. Etant donné le tenseur covariant χ de rang p , sa dérivée covariante $\nabla\chi$ est le tenseur covariant de rang $p+1$ de composantes :

$$(\nabla_i \chi)_{i_1 \dots i_p} = \partial_i \chi_{i_1 \dots i_p} - \sum_{\nu=1}^p \Gamma_{i_\nu i}^\alpha \chi_{i_1 \dots i_{\nu-1} \alpha i_{\nu+1} \dots i_p}$$

où les Γ_{ji}^α sont les symboles de Christoffel dans le système de coordonnées utilisées (ou bien dans le champ de co-repères considérés) :

$$\Gamma_{ji}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_i g_{\beta j} + \partial_j g_{\beta i} - \partial_\beta g_{ji}),$$

les sommations étant effectuées sur les indices répétés.

Pour une p -forme alternée χ l'usage de la dérivation covariante ∇ permet d'exprimer $d\chi$ et $d^*\chi$ et l'on a en particulier :

$$(3) \quad (d^*\chi)_{k_1 \dots k_{p-1}} = - (\nabla^i \chi)_{i k_1 \dots k_{p-1}}.$$

B. PERTURBATION DU LAPLACIEN.

(M, g) est une variété riemannienne compacte.

On considère sur M la fonction $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

On définit

$$d_t = e^{-ht} d e^{ht} \quad , \quad d_t^* = e^{ht} d^* e^{-ht}$$

On a immédiatement :

$$d_t^2 = (d_t^*)^2 = 0$$

$$\langle d_t \phi, \psi \rangle = \langle e^{-ht} d e^{ht} \phi, \psi \rangle = \langle \phi, e^{ht} d^* e^{-ht} \psi \rangle$$

donc d_t^* est l'adjoint de d_t .

On a aussi la formule :

$$(4) \quad \begin{aligned} d_t \phi &= e^{-ht} d(e^{ht} \phi) \\ &= e^{-ht} (d(e^{ht}) \wedge \phi + e^{ht} d\phi) \\ &= t dh \wedge \phi + d\phi \end{aligned}$$

On considère enfin le laplacien perturbé :

$$H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t.$$

En notant d_t^p la restriction de d_t à $C^\infty(\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C})$ on peut définir le nombre de Betti :

$$B_p(t) = \dim (\text{Ker } d_t^p / \text{Im } d_t^{p-1}) ;$$

mais l'application : $\psi \rightarrow e^{-t\psi}$ définit un isomorphisme :

$$\text{Ker } d_t^p / \text{Im } d_t^{p-1} \simeq \text{ker } d_t^p / \text{Im } d_t^{p-1}$$

et l'on a :

$$\dim \text{Ker } H_t^p = B_p(t) = B_p = \dim \text{Ker } H^p$$

où H^p est le laplacien sur les p -formes.

Nous allons maintenant effectuer le calcul effectif de H_t afin d'obtenir la formule de E. Witten.

On déduit de (1) et de (4) :

$$d_t^* \psi = t i_{dh} \psi + d^* \psi.$$

Pour une q -forme χ on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} d_t^* d_t \chi &= t i_{dh} (t dh \wedge \chi + d\chi) + d^*(t dh \wedge \chi + d\chi) \\ &= d^* d\chi + t^2 i_{dh} (dh \wedge \chi) + t(i_{dh} d\chi + d^*(dh \wedge \chi)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_t d_t^* \chi &= t dh \wedge (t i_{dh} \chi + d^* \chi) + d(t i_{dh} \chi + d^* \chi) \\ &= d d^* \chi + t^2 dh \wedge (i_{dh} \chi) + t(dh \wedge d^* \chi + d(i_{dh} \chi)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_t \chi &= H\chi + t^2 [i_{dh} (dh \wedge \chi) + dh \wedge (i_{dh} \chi)] \\ &\quad + t [i_{dh} d\chi + d(i_{dh} \chi) + d^*(dh \wedge \chi) + dh \wedge d^* \chi]. \end{aligned}$$

On a, par définition des produits intérieur et extérieur :

$$i_{dh} (dh \wedge \chi) = i_{dh} (dh) \chi = dh \wedge (i_{dh} \chi),$$

donc :

$$i_{dh} (dh \wedge \chi) + dh \wedge (i_{dh} \chi) = (dh)^2 \chi$$

où l'on pose

$$(dh)_X^2 = (dh_X, dh_X).$$

Il reste maintenant à calculer

$$P_{dh}(\chi) = i_{dh}(d\chi) + d(i_{dh}\chi) + d^*(dh \wedge \chi) + dh \wedge d^*\chi.$$

Pour $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, compte tenu de (2).

$$\begin{aligned} P_{dh}(f\chi) &= i_{dh}(df \wedge \chi + f d\chi) + df \wedge i_{dh}\chi + f d(i_{dh}\chi) \\ &\quad + f d^*(dh \wedge \chi) - i_{df}(dh \wedge \chi) + f dh \wedge d^*\chi - dh \wedge i_{df}\chi \\ &= (dh, df)\chi - df \wedge i_{dh}\chi + f i_{dh}d\chi + df \wedge i_{dh}\chi + f d(i_{dh}\chi) \\ &\quad + f d^*(dh \wedge \chi) - (df, dh)\chi + dh \wedge i_{df}\chi = f dh \wedge d^*\chi - dh \wedge i_{df}\chi. \\ &= f [i_{dh}(d\chi) + d(i_{dh}\chi) + d^*(dh \wedge \chi) + dh \wedge d^*\chi] \\ &= f P_{dh}(\chi). \end{aligned}$$

Ceci montre que P_{dh} est un opérateur différentiel d'ordre zéro sur les fibrés de formes. Il suffit d'évaluer $P_{dh}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)$ dans un système de coordonnées quelconques.

On prend, au voisinage d'un point fixé x_0 de M un système de coordonnées normales géodésiques. On a dans ces coordonnées :

$$\begin{aligned} g_{ij}(x_0) &= \delta_{ij} \\ \Gamma_{kl}^i(x_0) &= 0 \\ d(g^{ij})(x_0) &= 0 \\ d^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^q)(x_0) &= 0 \\ \nabla_i \nabla_j h(x_0) &= \partial_i \partial_j h(x_0) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Il vient ainsi, au point x_0 :

$$\begin{aligned} P_{dh}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) &= d(i_{dh}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)) + d^*(dh \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) \\ &= \sum_k \left[d\left(\frac{\partial h}{\partial x^k} i_{dx^k}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)\right) + d^*\left(\frac{\partial h}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p\right) \right] \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 h}{\partial x^k \partial x^\ell} dx^\ell \wedge i_{dh^k}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) + \sum_k \frac{\partial h}{\partial x^k} d(i_{dx^k}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)) \\ &\quad + \sum_k \frac{\partial h}{\partial x^k} d^*(dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) - i_{\sum_k \frac{\partial^2 h}{\partial x^\ell \partial x^k} dx^\ell} (dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p). \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, les 2-ème et 3-ème termes sont nuls au point x_0 et l'on obtient :

$$P_{dh}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 h}{\partial x^l \partial x^k} (dx^l \wedge i_{dx^k} - i_{dx^k} dx^l \wedge)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p).$$

On trouve de cette façon la formule donnée par E. Witten [12] dans un champ de co-repères orthonormés $(\theta^1, \dots, \theta^n)$.

On pose :

$$a^k_\psi = i_{\theta^k} \psi$$

$$a^{k*}_\psi = \theta^k \wedge \psi ;$$

alors il vient :

$$P_{dh}(\chi) = \sum_{i,j} \nabla_i \nabla_j h [a^{i*}, a^j](\chi)$$

En conclusion, nous obtenons :

$$H_t \chi = H\chi + t^2 (dh)^2 \chi + t \sum_{i,j} \nabla_i \nabla_j h [a^{i*}, a^j](\chi).$$

C. INEGALITES FAIBLES DE MORSE.

(a) Le spectre du laplacien perturbé :

Ayant considéré une fonction $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, nous avons introduit le laplacien perturbé

$$H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t$$

où :

$$d_t = e^{-th} d e^{th} ;$$

nous avons vu que

$$\dim \text{Ker } H_t^p = \dim \text{Ker } H^p$$

c'est-à-dire :

$$B_p(t) = B_p \quad (\text{le } p\text{-ème nombre de Betti de } M)$$

(nous avons posé ici :

$$H \equiv H_0 = dd^* + d^*d).$$

Nous avons aussi montré dans la section précédente qu'en un point x de M on a :

$$(6) \quad H_t = dd^* + d^*d + t^2(dh)^2 + \sum_{i,j} t \nabla_i \nabla_j h [a^{i*}, a^j]$$

où $a^k \psi = i_{\theta^k} \psi$, $a^{k*} \psi = \theta^k \wedge \psi$, $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ étant un co-repère orthonormé en x .

On note $L^2(\Lambda T^*M \otimes \mathbb{C})$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $C^\infty(T^*M \otimes \mathbb{C})$ pour le produit pré-hilbertien \langle, \rangle de la section A ci-dessus.

La restriction H_t^D de H_t à $\Lambda^p T^*M \otimes \mathbb{C}$ est alors un opérateur différentiel elliptique admettant un spectre discret :

$$0 \leq \lambda_p^1(t) \leq \lambda_p^2(t) \leq \lambda_p^3(t) \leq \dots$$

D'après l'égalité (5) il s'agit de calculer le nombre de valeurs propres $\lambda_p^k(t)$ égales à 0 : ce nombre est égal à B_p ; il est indépendant de t .

Nous allons effectuer ce calcul sous l'hypothèse que h est une fonction de Morse sur M .

HYPOTHESE :

Dans toute la suite on suppose que $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est une fonction de Morse non dégénérée sur M c'est-à-dire que $dh = 0$ en un nombre fini de points et en chacun de ces points critiques, le hessien $(\nabla_i \nabla_j h)$ est non-dégénéré. On note $M_p(h)$, ou M_p , le nombre de points critiques de h dont l'indice de Morse est égal à p (cet indice est le nombre de valeurs propres négatives du hessien ∇dh , pour $p = 0, 1, \dots, n$).

Le calcul de B_p est effectué dans la suite à l'aide de deux résultats inspirés du rappel (i) concernant l'effet tunnel donné plus haut dans l'introduction.

Ces résultats peuvent se résumer de la façon suivante :

1°) Soit $\lambda_p^k(t)$ la k -ième valeur propre de H_t^D . Alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_p^k(t)}{t}$ existe.

2°) Cette limite A_p^k est l'une des valeurs propres des approximations euclidiennes de H_t^D au voisinage des points critiques de h .

Nous allons préciser ces énoncés en donnant des références précises.

(b) : Analyse asymptotique du spectre :

On trouve les résultats (1°) et (2°) dans les articles [9] , [11].

On peut aussi les obtenir par la méthode d'encadrement utilisée en [8] pour un problème analogue de localisation de l'indice d'un opérateur elliptique.

Citons ici le th. 1.1 de [11] (nous le simplifions légèrement) :

<< On considère sur \mathbb{R}^n l'opérateur $H(t) = -\Delta + t^2 f + tg$ où Δ est le laplacien scalaire, f et g sont C^∞ , g est bornée inférieurement, $f \geq 0$, $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, f a un nombre fini de zéros, $\{x^{(a)}\}_{1 \leq a \leq k}$ en chacun desquels la matrice

$$A_{ij}^{(a)} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(a)})$$

est strictement définie-positive. On pose :

$$K^a = -\Delta + tg(x^{(a)}) + t^2 \sum_{i,j} A_{ij}^a x_i x_j$$

Soient $te_1 \leq te_2 \leq te_3 \leq \dots$ l'ensemble ré-ordonné des valeurs propres des opérateurs K^a pour $a = 1, \dots, k$ (on voit que t est en facteur dans toutes ces valeurs propres en faisant le changement de variables $x \rightarrow xt^{-1/2}$).

Alors pour chaque entier $k > 0$, si l'on note $E^k(t)$ la k -ième valeur propre de $H(t)$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E^k(t)/t = e_k.$$

On a donc ramené le calcul de $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E^k(t)}{t}$ à une approximation euclidienne de $H(t)$ autour d'un point critique de $f \gg$.

Ce théorème est démontré en [11] par des méthodes relativement élémentaires.

Il est étendu dans cet article [11] aux laplaciens sur les formes d'une variété riemannienne compacte. C'est sous cette forme qu'il sera utilisé ici.

(c) Cas du laplacien sur les formes :

On reprend ici la fonction de Morse h sur M .

Soit 0 un point critique de h . Alors on peut choisir un système de coordonnées normales géodésiques en 0 où l'on a :

$$h(x) = h(0) + \frac{1}{2} \sum \lambda_i (x^i)^2 + o(\|x\|^3).$$

On a une approximation euclidienne de H_t en 0 à l'aide de l'opérateur \bar{H}_t défini sur les formes de \mathbb{R}^n de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\bar{H}_t &= \sum_i H_i + t \sum_j \lambda_j K_j \\ H_i &= -\frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} + t^2 \lambda_i^2 (x^i)^2 \\ K_j &= [a^{j*}, a^j] = \theta^j \wedge i_{\theta^j} - i_{\theta^j} \theta^j \wedge .\end{aligned}$$

Chaque H_i peut être considéré comme l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique sur \mathbb{R} . Ses valeurs propres sont égales à

$$t |\lambda_i| (1+2N_i)$$

$N_i = 0, 1, 2, \dots$. Soit ϕ_{N_i} la fonction propre correspondante, alors $t |\lambda_i| (1+2N_i)$ est aussi valeur propre de H_i sur $L^2(\Lambda^{pT*} \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C})$ avec la fonction propre $\phi_{N_i}(x_i) \chi$ où $\chi \in \Lambda^{pT*} \mathbb{R}^n$ est une p -forme quelconque.

Puisque K_j est un opérateur d'ordre zéro sur les champs de p -formes, il suffit de le considérer sur l'espace vectoriel $\Lambda^{pT*} \mathbb{R}^n$. Cet espace admet la base naturelle $(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$.

On calcule $K_j(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})$ suivant deux cas :

1er cas : j figure dans la suite i_1, \dots, i_p : $\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} = \theta^j \wedge \phi$, on obtient dans ces conditions :

$$K_j(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) = \theta^j \wedge i_{\theta^j} (\theta^j \wedge \phi) = \theta^j \wedge \phi = \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} .$$

2ème cas : j ne figure pas dans cette suite :

$$\begin{aligned}K_j(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) &= -i_{\theta^j} (\theta^j \wedge \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) \\ &= -\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} .\end{aligned}$$

On voit ainsi que les opérateurs K_j se diagonalisent simultanément sur les vecteurs de base avec les valeurs propres ± 1 .

Ainsi on a, au point critique 0 de h sur M :

$$\bar{H}_t = \sum_i H_i + t \sum_j \lambda_j K_j$$

où les opérateurs H_i, K_j commutent deux à deux. Leurs formes propres peuvent s'écrire

$$\phi(x) \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$$

où $\phi(x) = \phi(x^i)$ pour H_i et $\phi(x) = 1$ pour K_j et où $(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$ est une base de $\Lambda^{pT^*} \mathbb{R}^n$.

On déduit de ceci que les formes propres de \bar{H}_t sont égales à :

$$\phi_{N_1}(x^1) \dots \phi_{N_n}(x^n) \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$$

et que les valeurs propres de \bar{H}_t sont égales à

$$t \sum_{i=1}^n (|\lambda_i| (1+2N_i) + \lambda_i n_i)$$

avec $N_i = 0, 1, 2, \dots$ et avec $n_i = \pm 1$, le nombre de n_i égaux à + 1 étant, lui, égal à p (on considère d'abord tout cela la restriction de \bar{H}_t à $L^2(\Lambda^{pT^*} \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C})$).

(d) Les inégalités faibles de Morse :

D'après le "principe de localisation" rappelé en (b), on obtient pour l'une quelconque des valeurs propres $\lambda_p^k(t)$ de H_t^p le fait que la limite A_p^k de $\frac{\lambda_p^k(t)}{t}$ existe quand $t \rightarrow +\infty$ et est égale à l'un des nombres précédents :

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n (|\lambda_i| (1+2N_i)) + \lambda_i n_i$$

où $N_i \in \mathbb{N}$ et $n_i = \pm 1$ (le nombre de n_i égaux à + 1 étant égal à p).

D'autre part si $\lambda_p^k(t) = 0$ on a évidemment $A_p^k = 0$ donc d'après le rappel (a), le nombre de Betti B_p de M est inférieur ou égal au nombre d'expressions (7) qui sont nulles. Mais l'expression (7) est nulle si et seulement si :

$$. N_i = 0,$$

. Chacun des n_j qui égale 1 correspond à un $\lambda_j < 0$; Comme il a p de ces n_j dans l'expression (7), ceci donne un point critique d'indice de Morse égal à p .
On a donc

$$B_p(M) < M_p(h)$$

Conclusion : cette inégalité faible de Morse est une conséquence du fait qu'il y a augmentation asymptotique des états d'énergie nulle du laplacien sur les p -formes quand ce laplacien est perturbé par un potentiel déduit d'une fonction de Morse.

On peut dire aussi que le nombre de Betti B_p de M est une borne inférieure pour le nombre "d'états classiques" d'énergie nulle ($(dh)^2 = 0$), d'indice de M sur p , dans le potentiel $t^2(dh)^2$. Une caractéristique globale de M (le nombre de Betti) exerce ainsi une contrainte sur des propriétés locales de h .

BIBLIOGRAPHIE.

- [8] E. COMBET, *Perturbations singulières et formules de localisation.*
CRAS (série I) 297 (1983) 59-61.
- [9] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, *Puits multiples pour l'équation de Schrödinger,*
Saint-Jean- de Monts juin 1983.
- [10] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions.* Dunod 1955.
- [11] B. SIMON, *Semi-classical of low lying eigenvalues,* Annales IHP. (A)
vol. XXXVIII, 1983 , 295-307.
- [12] E. WITTEN, *voir l'introduction, réf. [6] .*
