

M. KHALIS

Dimension des anneaux de séries formelles sur un « $D + M$ »

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 31-37

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_31_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIMENSION DES ANNEAUX DE SERIES FORMELLES SUR UN "D+M"

M. KHALIS

Université Claude Bernard - LYON 1

43, boulevard du Onze Novembre 1918 - 69622 VILEURBANNE Cedex - LYON - FRANCE

0 - INTRODUCTION.

Soit R un anneau commutatif, intègre, unitaire et de dimension de Krull finie. On note respectivement par $R[X]$ et $R[[X]]$ l'anneau des polynômes et l'anneau des séries formelles à coefficients dans R . Il est déjà connu que si $\dim R = m$, alors $m + 1 \leq \dim R[X] \leq 2m + 1$. J. Arnold a montré [[2], Th. 1] que les anneaux de séries formelles ne possèdent pas cette propriété, plus précisément, si R n'est pas un SFT-anneau, alors $\dim R[[X]] = \infty$. Un idéal I de R est dit SFT-idéal [2] "Strong finite type", s'il existe un entier $k \geq 1$ et un idéal $J \subseteq I$ de type fini de R , tels que : $x^k \in J$, pour tout $x \in I$. L'anneau R est dit SFT-anneau si tous ses idéaux sont des SFT-idéaux.

La dimension de Krull de l'anneau $R[[X]]$ est déjà connue dans le cas où R est noethérien ou prüférien [3], quelques exemples particuliers ont été aussi traités dans la littérature [2], [3], [6],...

La première partie de ce travail est consacrée au transfert de la SFT-propriété aux produits fibrés d'anneaux ; aussi élargira-t-on la classe d'anneaux R tels que la dimension de Krull de $R[[X]]$ soit infinie. Dans la deuxième partie, on considère un anneau de valuation de la forme $V = K + M$, où K est son corps résiduel, M son idéal maximal, et, $R = D + M$ où D est un sous-anneau de K . Si V est un anneau de valuation discrète et D est un SFT-anneau, (dans le cas contraire, $\dim R[[X]] = \infty$ d'après la première partie), alors :

$$\dim R[[X]] = \dim D[[X]] + \dim V.$$

Ceci nous permettra d'évaluer la dimension de Krull d'autres anneaux n'appartenant à aucune des familles déjà connues, et contrairement aux anneaux de polynômes, le degré de transcendance de K sur le corps des fractions de D n'a aucune importance.

I - TRANSFERT DE LA SFT-PROPRIETE AUX PRODUITS FIBRES.

Soient T un anneau, M un idéal maximal de T et K son corps résiduel. Soit $\varphi : T \twoheadrightarrow K$ la surjection canonique et posons $R = \varphi^{-1}(D)$, où D est un sous-anneau de K .

I.1. PROPOSITION. [[1], Lemme 2.1] .

(a). R est un produit fibré déterminé par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 R = \varphi^{-1}(D) & \xrightarrow{\quad} & D \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & K
 \end{array}$$

où les homomorphismes sont canoniques.

(b). $M = (R:T)$ et $R/M \simeq D$.

(c). $\text{Spec}(R) \simeq \text{Spec}(D) \amalg_{\text{Spec}(K)} \text{Spec}(T)$.

(d). Si T est local, alors M est un idéal premier divisé, et tout idéal premier de R est comparable avec M .

(e). Si T est local, alors $\dim R = \dim D + \dim T$.

(f). Pour tout idéal premier P de R tel que $M \not\subseteq P$, il existe un unique idéal premier Q de T tel que : $Q \cap R = P$, et on a : $T_Q = R_P$.

I.2 - Dans la propriété (f) de la proposition précédente, si on suppose que T est local, alors pour tout $P \in \text{Spec}(R)$ avec $M \not\subseteq P$ (donc $P \subseteq M$, d'après (d)), il existe un unique $Q \in \text{Spec}(T)$ tel que : $P = Q \cap R$. Comme M est l'idéal maximal de T et $M \not\subseteq R$, $P = Q \cap R = Q$. Ainsi, $P \in \text{Spec}(R)$ avec $P \subseteq M \iff P \in \text{Spec}(T)$.

I.3. THEOREME - Sous les hypothèses de la proposition I.1, on suppose que (T,M) est local. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i). R est un SFT-anneau ;
- (ii). Les anneaux T et D sont des SFT-anneaux.

DEMONSTRATION - Pour montrer qu'un anneau satisfait la SFT-proprété, il suffit de montrer que tous ses idéaux premiers sont des SFT-idéaux, [[3], proposition 2.2].

(ii) \Rightarrow (i). Supposons que T et D soient des SFT-anneaux et soit P un idéal premier de R.

Deux cas sont possibles :

$$P \subseteq M \text{ ou } M \not\subseteq P \quad (\text{I.1. (d)})$$

- Si $P \subseteq M$, $P \in \text{Spec}(T)$ et comme T est supposé être un SFT-anneau, il existe $k' > 0$ et $J = (x_1, \dots, x_n)T \subseteq P$ tel que : $x^{k'} \in J$, pour tout $x \in P$.

Pour tout $i : 1 \leq i \leq n$, $x_i \in J \subseteq P \not\subseteq R$, d'où $x_i \in R$. On pose :

$$I = (x_1, \dots, x_n)R \text{ et } k = 2k' > 0,$$

on a :

• $I \subseteq P$, I est un idéal de type fini de R,

• Pour tout $x \in P$, $x^{k'} \in J$ d'où $x^{k'} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ avec $a_i \in T$, $1 \leq i \leq n$.

$$x^k = (x^{k'})^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i (a_i^2 x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i (2a_i a_j x_j)$$

or, les $a_i \in T$ et $x_i \in P \not\subseteq R$, d'où $x^k \in I$, et par suite P est un SFT-idéal de R.

En particulier, lorsque $P = M$, il existe $J_1 = (y_1, \dots, y_s)R$ et $k_1 > 0$ tel que : $x^{k_1} \in J_1$, pour tout $x \in M$.

- Si $M \not\subseteq P$: $R/M \cong D$ (I.1. (b)).

R/M est donc un SFT-anneau. Ainsi, pour $P/M \in \text{Spec}(R/M)$, il existe :

$$\bar{I} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \subseteq P/M \text{ et } k_2 > 0 \text{ tel que : } \bar{x}^{k_2} \in \bar{I}, \forall \bar{x} \in P/M.$$

Soit $J : (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)R$, et $k = k_1 k_2$. On a :

- $J \subseteq P$, est un idéal de type fini de R .
- Pour tout $x \in P$, on a :

$$x^{k_2} \in I + M \text{ d'où : } x^{k_2} = \sum_{i=1}^r a_i x_i + b, \text{ où } a_i \in R \text{ et } b \in M.$$

$$\begin{aligned} x^k &= x^{k_1 k_2} = \left(\sum_{i=1}^r a_i x_i + b \right)^{k_1} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^r a_i x_i \right)^{k_1}}_{\in J} + \underbrace{b^{k_1}}_{\in J} + \underbrace{\sum_{i=1}^r a_i x_i}_{\in J} \underbrace{\left(\sum \dots \right)}_{\in R} \end{aligned}$$

or $b^{k_1} \in J_1 = (y_1, \dots, y_s)R \subseteq J$. Ainsi $x^k \in J$.

(i) \Rightarrow (ii). Supposons que R soit un SFT-anneau. $D \simeq R/M$ et donc D est un SFT-anneau, [[3], Prop. 2.3]. Soit $P \in \text{Spec}(T)$, P est un idéal premier de R (I.2), d'où, il existe $k > 0$ et $J = (x_1, \dots, x_m)R$ tel que : $x^k \in J$, pour tout $x \in P$. Posons : $I = (x_1, \dots, x_m)T \subseteq P$, alors, $x^k \in I$ pour tout $x \in P$ et par suite T est un SFT-idéal.

□

II - DIMENSION DES ANNEAUX DE SERIES FORMELLES SUR UN "D+M".

Dans toute la suite, on considère $V = K + M$, un anneau de valuation de dimension m , et $R = D + M$ où D est un sous-anneau de K . Tout d'abord, si V est de valuation non discrète ou si D n'est pas un SFT-anneau, l'anneau $R[[X]]$ sera de dimension infinie (Th. I.2) et [[2], Th. 1]. On suppose donc que V est de valuation discrète de rang m , et D un SFT-anneau de dimension finie. Soit $(0) \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_{m-1} \subsetneq M$ la chaîne de tous les idéaux premiers de R contenus dans M .

II.1. THEOREME - Dans ces conditions on a :

$$\dim R[[X]] = \dim D[[X]] + \dim V.$$

Pour montrer ceci, on établira les lemmes et les résultats suivants.

II.2. LEMME - Pour tout $i : 0 \leq i \leq m-1$, on a :

$$(R/P_i[[X]])_{R/P_i - \{0\}} = (V/P_i[[X]])_{V/P_i - \{0\}}.$$

DEMONSTRATION - Pour tout i , $P_i \not\subseteq M$;

$$\forall \bar{m} \in M/P_i ; \bar{m} \cdot V/P_i[[X]] \subseteq M/P_i[[X]] \not\subseteq R/P_i[[X]].$$

et l'égalité en découle.

A partir de ce lemme, on déduit le résultat suivant.

II.3. COROLLAIRE - Pour tout $Q \in \text{Spec}(R[[X]])$ tel que : $Q \cap R = P_i \not\subseteq M$, il existe $Q' \in \text{Spec}(V[[X]])$:

$$Q' \cap R[[X]] = Q \text{ et } Q' \cap V = P_i.$$

II.4. COROLLAIRE - Pour tout $i : 0 \leq i \leq m-1$, il n'existe pas trois idéaux premiers de $R[[X]]$: $Q_1 \not\subseteq Q_2 \not\subseteq Q_3$ ayant la même trace P_i sur R .

DEMONSTRATION - En effet, pour tout $i : 0 \leq i \leq m-1$:

$$(V/P_i[[X]])_{V/P_i - \{0\}} = (R/P_i[[X]])_{R/P_i - \{0\}}$$

et

$$\dim(V/P_i[[X]])_{V/P_i - \{0\}} = 1, \quad [4], \text{ Prop. 5}.$$

II.5. LEMME - Pour tout $1 \leq i \leq m-1$, si Q est un idéal premier de $R[[X]]$ tel que : $Q \not\subseteq P_i[[X]]$, alors il existe $j < i$ tel que $Q = P_j[[X]]$, (et donc : $(0) \not\subseteq P_1[[X]] \not\subseteq \dots \not\subseteq M[[X]]$ est la seule chaîne saturée d'idéaux premiers de $R[[X]]$ contenus dans $M[[X]]$, d'où $\text{ht } M[[X]] = m$).

DEMONSTRATION - Soit $Q \in \text{Spec}(R[[X]]) : Q \not\subseteq P_i[[X]]$, $Q \cap R = P_j \not\subseteq P_i$, il existe $Q' \in \text{Spec}(V[[X]])$ tel que $Q = Q' \cap R[[X]]$ et $Q' \cap V = P_j$. Pour conclure, il suffit de montrer que $Q' \not\subseteq M[[X]]$, et donc $Q' = P_j[[X]]$ [4]. Sinon, soit :

$$f(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in Q' \setminus M[[X]],$$

$a_i \in V$. Soit i_0 minimal tel que : $a_{i_0} \notin M$. a_{i_0} est inversible dans V . On peut supposer que $a_{i_0} = 1$.

$$f(X) = \sum_0^{i_0-1} a_i X^i + X^{i_0} \cdot g(X) \text{ où } g(X) \text{ est inversible dans } V[[X]].$$

$$f(X) \cdot g(X)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{i_0-1} a_i X^i \right) \cdot g(X)^{-1} + X^{i_0}.$$

$f(X) \cdot g(X)^{-1}$ appartient à Q mais n'appartient pas à $M[[X]]$, or $Q \not\subseteq P_i[[X]] \not\subseteq M[[X]]$ ce qui est absurde.

II.6. LEMME - Dans l'anneau $R[[X]]$, si Q est un idéal premier de hauteur $m + 1$, alors Q contient $M[[X]]$.

DEMONSTRATION - Ceci découle de II.3, II.4 et II.5.

DEMONSTRATION de II.1 - Grâce au fait que : $R[[X]]/M[[X]] \simeq D[[X]]$, on peut supposer que $\dim D[[X]] < \infty$.

Soit $s = \dim R[[X]]$; $(o) \not\subseteq \dots \not\subseteq Q_s$ une chaîne qui réalise la dimension de $R[[X]]$. $i = \text{ht } Q_i$. Q_{m+1} contient $M[[X]]$, (II.6), et $\text{ht } Q_{m+1}/M[[X]] = 1$. On a :

$$\begin{aligned} \dim D[[X]] &= \dim R[[X]]/M[[X]] \\ &= \text{ht } Q_s/M[[X]] = s - m = \dim R[[X]] - \dim V. \end{aligned}$$

d'où $\dim R[[X]] = \dim D[[X]] + \dim V$.

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.F. ANDERSON, A. BOUVIER, D.E. DOBBS, M. FONTANA, S. KABBAJ, "On Jaffard domains".
- [2] J. ARNOLD, "Krull dimension in Power Series Rings". T. A.M.S., 177 (1973), 299-304.
- [3] J. ARNOLD, "Power series rings over Prüfer domains", Pacific J. Math. 44 (1973), 1-11.

- [4] **J. ARNOLD**, "The catelian property of power series rings over a Prüfer domains", Proc. Ame. Math. Soc. (1985).
- [5] **J.W. BREWER**, "Power series rings over commutative rings", Marcel Dekker - INC. (1983).
- [6] **J. NACHAR**, "Exemple d'anneau caténaire", C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. VIII, (1986).