

Introduction Des Jeux en logique

Manuel Rebuschi et Tero Tulenheimo
Université de Nancy 2, Université de Helsinki

1 Introduction. Le tournant des jeux

Les premiers rapprochements entre logique et théorie mathématique des jeux remontent à la fin des années 1950 avec l'inauguration de la logique dialogique par Lorenzen. L'idée de ce rapprochement était déjà présente chez Peirce qui suggéra dès le début du vingtième siècle d'interpréter les quantificateurs en termes de jeux (cf. [Hilpinen 1982]). Comme cela a été confirmé ensuite par les travaux de Hintikka et Sandu, les jeux ont offert et offrent un cadre théorique de première importance pour la théorisation logique et sémantique. L'apparition d'une « école hollandaise » reliant logique et jeux au milieu des années 1990 confirme la fécondité de ce mouvement.

L'approche de la sémantique en termes de jeux s'inscrit en réalité dans ce qui a été qualifié de « tournant dynamique » en sémantique formelle. Les premières théories sémantiques dans la lignée des travaux de Tarski considéraient de manière statique la confrontation d'un langage (langage formel ou fragment bien délimité de langue naturelle) à un modèle composé d'un domaine d'objets, de fonctions et de relations sur ces objets. Une fois données l'interprétation d'expressions simples (lettres de fonctions, de relations, constantes individuelles et propositionnelles) et

l'assignation de valeurs aux variables, la sémantique formelle traditionnelle calculait la valeur d'expressions plus complexes qu'elle considérait alors comme étant déjà fixée pour le modèle. La complexification des théories sémantiques – par exemple par le passage à des logiques intensionnelles (comme chez Montague) – a préservé ce caractère statique de l'interprétation. Ce n'est que lorsque les sémanticiens ont abordé l'analyse des discours et non plus des seules phrases isolées que la dynamique de l'interprétation s'est imposée au cœur des théories.

Sans entrer dans les détails techniques, disons simplement que l'analyse de suites ordonnées de phrases peut mobiliser de l'information qui n'est pas directement contenue dans le modèle. On peut s'en faire une idée avec ces deux exemples :

- (1) *Chirac marche. Il fume.*
- (2) **Il fume. Chirac marche.*

La différence entre ces deux suites de phrases – qui fait que la première est correcte et que la seconde ne l'est pas – n'est pas directement liée aux propriétés « statiques » du modèle. L'interprétation standard (à la Tarski) commencerait ici par transformer la phrase « *Il fume* » en « *Chirac fume* », et donnerait une valeur sémantique identique à (1) et (2) en vertu de la commutativité de la conjonction. Mais une théorie sémantique digne de ce nom se doit de repérer l'erreur de (2) : comment cela est-il possible ? Il faut alors recourir à une information spécifique liée au traitement du discours. Au-delà de la diversité des implémentations¹, l'idée est que le traitement de la phrase « *Chirac marche* » introduit un référent de discours qui permet ensuite d'interpréter le pronom anaphorique « *il* » ; le problème de (2) est alors simplement qu'au moment du traitement de « *Il fume* », aucun référent de discours n'a été préalablement introduit.

Le tournant dynamique en sémantique suggère un renouvellement de notre conception de la signification. La phrase, jusque-là conçue comme capturant la classe des modèles où elle est (statiquement) vraie, est dorénavant envisagée comme modifiant (dynamiquement) le contexte de l'interprétation du discours ultérieur.

Avec la sémantique dynamique, *l'action* acquiert ainsi droit de cité en logique. L'analyse sémantique conserve cependant l'aspect d'une partie

¹ Les plus connues des sémantiques dynamiques étant la DRT (Discourse Representation Theory) de Hans Kamp et la DPL (Dynamic Predicate Logic) de Jeroen Groenendijk et Martin Stokhof. Voir par exemple [van Eijck & Kamp 1997], [Genabith et al. 2004] pour la DRT, [Groenendijk & Stokhof 1991] pour la DPL.

de solitaire, chaque interprète étant supposé saisir isolément la signification du discours. La sémantique des jeux recourt quant à elle explicitement à *l'interaction*. Une idée sous-jacente à la logique dialogique est ainsi que c'est par le dialogue et non tous seuls que nous apprenons les langues naturelles.

L'idée générale de la sémantique des jeux consiste à associer systématiquement un jeu à chaque phrase, fragment de discours ou formule. Ce jeu met aux prises deux joueurs (voire deux équipes) et, selon les cas, permet d'établir la vérité matérielle ou logique de la phrase, du fragment de discours ou de la formule considérés au départ. Le sens des constantes logiques (connecteurs et quantificateurs) est fixé dans ce cadre par des règles spécifiques. Ainsi, la conjonction habituelle est interprétée de la manière suivante : dans le jeu $G(A_1 \& A_2)$ associé à la conjonction de A_1 et de A_2 , l'opposant (ou « falsificateur ») choisit l'un des deux termes de la conjonction, $A_i = A_1$ ou A_2 , et le proposant (ou « vérificateur ») doit gagner le jeu $G(A_i)$ correspondant à ce choix. L'idée est que si l'on est prêt à défendre une conjonction comme « *Paris est en France et Berlin est en Italie* », alors on doit être prêt à assumer celui des termes de la conjonction qu'un éventuel contradicteur choisirait.

Une distinction centrale pour la sémantique des jeux comme pour la logique dialogique est celle entre le gain d'une partie et la possession d'une stratégie gagnante. On peut en effet gagner une partie sans avoir de stratégie gagnante, quand notre adversaire joue mal. Dans l'exemple ci-dessus, le proposant peut gagner si son contradicteur choisit de lui demander d'assumer le premier terme (« *Paris est en France* ») qui se trouve être vrai – pour autant, le proposant n'a pas de stratégie gagnante car il ne peut pas gagner toutes les parties, i.e. il ne peut pas gagner contre *tous les choix* de l'opposant (notamment si celui-ci lui demande d'assumer le second terme). À l'inverse, un joueur peut disposer d'une stratégie gagnante dans un jeu mais perdre une partie de ce jeu – s'il ignore cette stratégie.

La question cruciale en sémantique des jeux comme en dialogique, c'est l'existence ou non d'une stratégie gagnante pour le proposant. L'existence d'une stratégie gagnante signale la vérité ou la validité selon les cas. Afin d'évaluer la vérité matérielle ou logique d'une phrase A , on lui associe le jeu $G(A)$ mais il faut ensuite se dégager des parties concrètes de ce jeu pour vérifier s'il possède une propriété générale, à savoir l'existence (abstraite) d'une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs.

Comme on peut s'y attendre, une telle approche donne des résultats identiques à ceux de la sémantique standard dans tous les cas classiques

traités en logique du premier ordre. L'intérêt de la démarche surgit dès qu'on dépasse le cas classique. Dans le traitement de l'anaphore par exemple, la dimension dynamique rend la sémantique des jeux tout à fait apte à rivaliser avec ses concurrentes les plus renommées (voir [Sandu 1997]). Mais au-delà, ce sont de nombreuses notions issues de la théorie mathématique des jeux qui peuvent désormais être utilisées en logique. Parmi les plus connues, la notion d'*information imparfaite* a ainsi été implémentée dans les jeux d'évaluation de la sémantique des jeux par Hintikka et Sandu, débouchant sur la production d'une nouvelle logique, la logique IF (*independence-friendly*). De façon plus générale, la modification des capacités d'action, mnésiques, cognitives, etc. des joueurs des jeux d'évaluation débouche sur d'innombrables variantes de la logique standard. L'école hollandaise est précisément en train d'explorer la diversité des relations possibles entre logique et jeux, utilisant pleinement les ressources nouvelles créées par ce rapprochement fructueux.

2 Le contexte historique

Vers une interface entre logique et jeux On peut voir l'origine de la théorie mathématique des jeux dans *La Théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique* (1921) d'Emile Borel [Borel 1921] et *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (1928) de John von Neumann [von Neumann 1928]. Elle a été anticipée par l'article *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* (1913) de Ernst Zermelo [Zermelo 1913]. Un classique de cette discipline est *Theory of Games and Economic Behavior* (1944) de von Neumann et Oskar Morgenstern [von Neumann & Morgenstern 1944].

Il est devenu courant d'employer des méthodes propres à la théorie des jeux en logique mathématique, en particulier en théorie des modèles. La sémantique de diverses logiques peut être définie de manière naturelle en utilisant des idées de la théorie des jeux : des exemples en sont fournis par la sémantique des formules de Vaught, par la sémantique des quantificateurs de Henkin ou encore par celle des langages infiniment profonds. De plus, les équivalences entre modèles relatifs à diverses logiques sont souvent caractérisées en empruntant des outils à la théorie des jeux.

Au sein de la recherche philosophique et linguistique, trois groupes utilisant les outils de la théorie mathématique des jeux, en grande partie mutuellement indépendants l'un de l'autre, se sont établis en quelques décennies : (a) la logique dialogique ; (b) la théorie sémantique des jeux de Hintikka et de ses collaborateurs ; (c) la théorie générale des jeux et de la logique de van Benthem et de ses collaborateurs.

Comme nous l'avons signalé plus haut, la logique dialogique a été créée par Paul Lorenzen dans les années 1950, et développée ensuite en collaboration avec Kuno Lorenz [Lorenzen & Lorenz 1978]. A l'origine, elle était conçue comme une approche pragmatique de la logique, en particulier de la logique intuitionniste. Bien qu'ayant été négligée par les courants dominants et les plus influents en logique pendant plusieurs décennies, la logique dialogique a bénéficié du récent renouveau des approches non-standard en sémantique. Elle apparaît aujourd'hui comme offrant un cadre général de représentation et de comparaison pour différentes théories logiques, comme en témoignent notamment [Rahman 2001], [Rahman & Rückert 2001a] et [Blackburn 2001a].

Jaakko Hintikka et Jack Kulas ont développé dans les années 1980 une approche des langues naturelles en termes de théorie des jeux [Hintikka & Kulas 1983], [Hintikka & Kulas 1985]. Dans ce cadre, certains principes de la linguistique traditionnelle – comme la distinction entre sémantique et pragmatique – sont directement contestés. Philosophiquement ancrée dans l'idée de jeu de langage de Ludwig Wittgenstein, la théorie sémantique des jeux (GTS pour « *Game-Theoretical Semantics* ») conçoit la relation langage-monde comme étant constituée par des pratiques humaines institutionnelles, gouvernées par des règles. Le cadre de la théorie des jeux joue un rôle important dans l'approche de [Hintikka 1996] des fondements des mathématiques. La motivation et l'intérêt théorique de la logique IF (ou logique faite pour l'indépendance) de Hintikka et Gabriel Sandu résident dans le point de vue général sur le langage offert par la théorie sémantique des jeux (voir p.ex. [Hintikka & Sandu 1997]).

Depuis le milieu des années 1990, Johan van Benthem et d'autres logiciens des Pays-Bas, parmi lesquels Peter van Emde Boas, Hans van Ditmarsch, Wiebe van der Hoek, Benedikt Löwe et Marc Pauly, ont étudié des relations jusque-là inexplorées entre logique et jeux : il n'y a pas que des jeux pour la logique comme les jeux sémantiques de l'approche de Hintikka, on peut aussi considérer des logiques spécialement conçues pour les jeux et pour la théorie des jeux en général. Ces recherches sont liées aux travaux actuels en logiques modale et épistémique, et elles fournissent également une perspective intéressante sur la logique et sur la sémantique.

Des motivations théoriques variées La logique dialogique et GTS ont toutes deux été créées dans un contexte philosophique spécifique. Leur intérêt théorique n'est cependant absolument pas limité par cela. Grâce à leur formulation de type mathématique, on peut parfaitement adopter un point de vue « laïcisé » à leur égard. Définir la sémantique

d'une logique en termes de jeux ne présuppose pas, par exemple, de partager les idées de Hintikka sur le fonctionnement des langues naturelles. Pas plus qu'étudier la validité des formules d'une logique donnée en utilisant des jeux dialogiques n'implique d'adhérer aux idées pragmatistes ou intuitionnistes de Lorenzen. Quant à l'école hollandaise, elle est depuis le début neutre par rapport aux positions philosophiques particulières.

Les développements systématiques récents dans le cadre de GTS ont été principalement liés à la logique plutôt qu'à la théorie du langage. Parmi les recherches récentes on trouve les travaux de Hintikka sur la relation entre logique IF et logique quantique [Hintikka 2002a]; sur la logique épistémique de la seconde génération [Hintikka 2003]; ou encore l'article [Tulenheimo 2003], où la théorie sémantique des jeux est essentiellement utilisée pour étudier la logique modale IF – une modification de la logique modale de base où les opérateurs modaux peuvent être logiquement indépendants d'opérateurs syntaxiquement antérieurs. Il y a en fait une tendance parallèle entre l'approche de GTS et la logique dialogique (comme le montre p.ex. [Rahman & Keiff 2004]) puisque dans ces deux cadres, la logique modale et la logique temporelle ont permis des développements théoriquement intéressants.

Bien qu'étant également rattachés à l'approche de GTS, les travaux [Pietarinen & Sandu 2001] et [Pietarinen 2004] sont fortement liés à l'idée sous-jacente de l'école hollandaise suivant laquelle la logique et les jeux sont d'un point de vue théorique égaux et parallèles. Vues sous cet angle, les pratiques adoptées dans le cadre de la théorie des jeux sont souvent conçues comme des normes censées borner les systèmes logiques : si les jeux d'un certain type sont utilisés pour définir une logique, ils doivent être d'une forme spécifique dictée par la théorie des jeux². Considérée dans une perspective plus libérale, l'approche caractéristique de l'école hollandaise permet d'étendre l'idée de ce que c'est qu'être une logique dans un sens qui semble présupposer seulement (mais essentiellement) la disponibilité d'outils issus de la théorie des jeux. En modifiant et en généralisant les jeux dans les termes desquels on a défini une logique, on peut, suivant cette approche, générer de nouvelles logiques.

Bien que les nouveautés théoriques de l'approche GTS aient princi-

² Par exemple, on suppose habituellement au sujet des jeux à information imparfaite que les parties qui ne sont pas distinguables pour un joueur doivent avoir toutes leurs continuations possibles en commun ; si l'on peut choisir une action donnée pour continuer une de ces parties, il faut que ce même choix soit aussi possible comme continuation des autres parties. Mais si l'on donne à la théorie des jeux un statut normatif par rapport à la logique, les logiques dont la sémantique utilise des jeux qui ne se conforment pas à cette norme (« Aux parties non distinguées, les mêmes continuations ») ne sont pas bien définies.

palement eu lieu sur le plan logique, on peut utiliser les outils qu'elle apporte pour discuter des questions de linguistique, comme en témoignent [Hintikka & Sandu 2001], [Hintikka 2002b] ou [Tulenheimo 2004b]. L'article [Janasik & Sandu 2003] utilise les formes extensives de jeux sémantiques de manière originale pour analyser le phénomène d'anaphore dans les langues naturelles. Dans le cadre de l'approche hollandaise aussi, les jeux sont utilisés pour discuter des questions de linguistique. L'article de Robert van Rooij dans ce volume en donne un exemple.

3 Divergences et convergences

Le point de départ des trois approches La logique dialogique est principalement destinée à fournir une méthode effective³ de caractérisation de la validité des formules logiques⁴. Cette méthode n'est pas limitée au cas spécifique de la logique du premier ordre. Au contraire, une partie importante des recherches dans ce cadre consiste à étendre la méthode des jeux dialogiques à des logiques très variées. La théorie sémantique des jeux a été originalement conçue comme un outil pour décrire la sémantique des langues naturelles, et pour définir les conditions de vérité et fausseté des formules logiques. Ainsi GTS ne se concentre-t-elle pas sur la caractérisation de la *validité* ou *vérité logique* des formules, mais sur la caractérisation de leur *vérité* (et *fausseté*) *matérielle*. L'objectif de l'école hollandaise des jeux en logique se situe en revanche sur un plan différent : il s'agit d'explorer et de trouver les sources possibles d'interaction entre logique et théorie des jeux de façon absolument générale, sans imposer aucune limitation spécifique préalable à l'entreprise, donc notamment sans imposer de limitation liée à un but théorique particulier.

Telles sont les différences les plus visibles entre les trois approches, différences qui découlent immédiatement de l'écart entre les motivations théoriques. Y a-t-il des convergences ou des divergences plus profondes ? En premier lieu, pourrait-on dire que par sa généralité, l'approche de l'école hollandaise englobe l'approche dialogique et celle de GTS ? Par leur contenu mathématique explicite, ces dernières sont bien sûr compatibles avec l'esprit de l'approche hollandaise dont l'intérêt théorique se

³ La dialogique ne prétend évidemment pas combler l'indécidabilité. Elle tire de ses origines pragmatistes l'idée d'une *effectivité* qui se matérialise dans ses jeux (qui doivent être jouables dans la pratique), et que l'on retrouve dans l'idée que l'essentiel n'est pas de démontrer l'existence d'une stratégie gagnante pour le proposant mais bien de *montrer* par un nombre fini de parties quelle est cette stratégie gagnante.

⁴ Principalement mais pas exclusivement, puisque des dialogues matériels peuvent être définis qui permettent l'évaluation de formules dans un modèle donné.

concentre précisément sur l'interface entre jeux et logique. Mais d'autre part, la dialogique comme GTS utilisent les jeux comme des outils pour modéliser des phénomènes et étudier des problèmes connus indépendamment de cet instrument de modélisation. L'approche hollandaise procède plutôt en sens inverse, des jeux à la (ou plutôt aux) logique(s), et elle est philosophiquement neutre. Les jeux dialogiques et les jeux que Hintikka et ses collaborateurs ont utilisés ne sont ainsi certainement pas des cas particuliers typiques de jeux des Hollandais. Ce sont des précurseurs historiques essentiels de l'école hollandaise, plutôt que quelque chose qui aurait pu, selon quelque probabilité, être créé à partir de ce cadre⁵. Quant à la distinction entre GTS et l'approche dialogique de la logique, on peut dire que la première s'occupe de la relation langage-monde dont l'équivalent mathématique est étudié par la théorie des modèles, tandis que la seconde est plutôt concernée par la question de la preuve de théorèmes et, par là, reliée à la théorie de la démonstration.

Des traits propres à chaque approche L'un des apports principaux de l'approche de la logique en termes de jeux réside dans une certaine souplesse : il est très aisé de modifier les jeux pour produire de nouvelles logiques. Ces modifications peuvent intervenir sur différents plans : il est possible de modifier les règles du jeu ou bien les stratégies disponibles, mais on peut également augmenter ou réduire les capacités des joueurs. Cette dernière approche est typique de l'école hollandaise et de la conception dialogique, tandis que GTS conçoit traditionnellement les jeux comme des modes de description des propriétés combinatoires d'un modèle sans présupposer de capacités épistémiques aux joueurs. Hintikka insiste régulièrement sur le fait qu'il ne saurait selon sa conception être question de joueurs *possédant* une stratégie, mais seulement de l'existence ou non de ces stratégies.

Des différenciations très fines peuvent intervenir, tant au niveau des actions dans les jeux qu'à celui des stratégies. En logique dialogique c'est principalement au niveau des règles du jeu (et pas au niveau des stratégies) que le proposant et l'opposant se voient attribuer des pouvoirs d'action plus ou moins étendus. Une variation sur ces règles engendre une nouvelle logique : l'obligation supplémentaire pour le proposant de défendre le dernier argument non défendu vs. la possibilité de défendre n'importe quel argument marque ainsi le passage de la logique classique à la logique intuitionniste. Dans GTS, c'est typiquement au niveau des stratégies que les limitations interviennent : on passe par exemple de

⁵ Il existe bien d'autres précurseurs liés à la tradition des jeux en logique mathématique, représentés par exemple par Leon Henkin, Andrzej Ehrenfeucht, David Gale et Frank M. Stewart.

la logique du premier ordre standard à la logique IF en restreignant la classe des stratégies gagnantes aux stratégies uniformes⁶. L'approche hollandaise reprend ce contraste sous la forme de stratégies connues ou non par les agents.

Posées en termes de capacités des joueurs, la *nature* des limitations des agents est également différente selon les traditions. Epistémique pour l'école hollandaise comme pour GTS, elle se situe au niveau des pouvoirs d'action pour la logique dialogique. Pour l'école hollandaise, les limitations et pouvoirs épistémiques des joueurs, intrinsèques à la théorie des jeux, sont à considérer littéralement. Dans les jeux à information imparfaite, ce sont donc certaines stratégies qui cessent d'être connues et accessibles par les joueurs. A l'opposé, pour GTS l'information imparfaite est modélisée par le fait que différents déroulements du jeu ne peuvent pas être distingués par l'un ou l'autre des joueurs – et cette lecture épistémique n'est par ailleurs pas essentielle. En logique dialogique il n'y a pas d'aspect épistémique explicite, l'accent principal de cette approche pragmatique de la logique étant mis sur l'action : les restrictions ne concernent que les coups autorisés ou interdits pour les joueurs.

Un surplus théorique induit par les jeux En définissant la sémantique d'une logique, disons la logique du premier ordre, en termes de jeux, on introduit des outils théoriques qui n'auraient pas été disponibles autrement, en particulier si la sémantique avait été formulée récursivement à la Tarski. Par exemple en ayant recours aux stratégies des joueurs, il est possible d'essayer de traiter des questions liées à la sémantique du discours, comme les liens anaphoriques entre différentes phrases, en termes de stratégies transmises de l'évaluation d'une phrase à l'évaluation d'une autre phrase.

L'intérêt théorique de GTS ne se limite cependant pas à ses applications linguistiques. Il y a des logiques dont la formulation la plus naturelle est donnée en termes de jeux. Pour définir la logique IF par exemple, il faut pouvoir exprimer le fait qu'un quantificateur est logiquement indépendant de certains quantificateurs syntaxiquement antérieurs. Pour cela, l'approche de GTS offre une implémentation naturelle : l'exigence que le choix qui interprète un quantificateur indépendant soit uniforme par rapport aux choix faits pour les autres quantificateurs dont celui-ci

⁶ Tant dans GTS qu'en dialogique apparaît une asymétrie entre les joueurs. Dans GTS, les règles du jeu sont tout à fait symétriques pour les joueurs et l'asymétrie se manifeste au niveau des stratégies gagnantes ; pour la dialogique, c'est au niveau des règles (notamment pour l'introduction des atomes, ou des contextes en logique modale).

est indépendant. Une manœuvre similaire n'aurait pas été possible dans le cadre de l'approche tarskienne de la sémantique⁷.

Un autre avantage de l'approche de la logique en termes de jeux, discuté dans le cadre de l'école hollandaise, est que les jeux associés aux formules permettent de distinguer deux formules logiquement équivalentes. La syntaxe d'une formule est en effet codifiée dans la structure du jeu associé à cette formule, rendant ainsi les jeux correspondant aux formules capables de distinctions plus fines que les conditions de vérité (ou, plus généralement, de satisfaction) de ces mêmes formules. D'une certaine manière, on peut dire que grâce aux jeux la sémantique des formules peut être affinée par la syntaxe.

Définir la sémantique d'une logique en utilisant des jeux peut donc être théoriquement utile, en comparaison aux mécanismes plus traditionnels de spécification d'une sémantique. Y a-t-il en retour des inconvénients induits par le recours aux jeux pour définir une sémantique ? On peut avoir une conception purement instrumentale de cette pratique alternative de l'usage des jeux en sémantiques. Mais l'approche hollandaise considère les jeux comme constituant une composante naturelle des systèmes logiques, et toutes les idées formelles qui présupposent essentiellement l'utilisation de jeux sont dans cette tradition considérées comme étant des idées logiques. Il n'est cependant pas évident – et il semble difficilement justifiable par une analyse philosophique – que les phénomènes liés à la théorie des jeux correspondent systématiquement et immédiatement à des phénomènes logiques.

Par exemple, du fait qu'il existe des jeux à rappel imparfait, y a-t-il un authentique phénomène logique d'indépendance des quantificateurs existentiels (resp. universels) par rapport à d'autres quantificateurs existentiels (resp. universels) ? Ces schémas d'indépendance ne sont-ils pas de purs artefacts ? Délimiter le domaine de la logique par rapport à celui de la théorie des jeux n'est pas une question triviale, et son importance est indéniable pour une théorie philosophique des jeux et de la logique. D'autre part, la simple existence de cette question révèle que l'interaction entre logique et jeux est théoriquement fructueuse. Si la rencontre de ces deux disciplines produit des développements qui ne relèvent clairement ni de l'une ni de l'autre, peut-être sommes-nous en présence des germes d'une discipline mathématique essentiellement nouvelle ?

⁷ Pour définir une sémantique récursive pour la logique IF (comme cela a été fait par [Hodges 1997], [Caicedo & Krynicki 1999], [Väänänen 2002]), il faut introduire une relation de satisfaction relativisée aux ensembles de suites d'interprétations de variables. Le résultat en est une sémantique assez compliquée, à laquelle il manque toute la souplesse possédée par GTS.

Conclusion Que peut-on dire de l'avenir des trois traditions des jeux en logique ? Avec l'étude des logiques non-normales, la logique dialogique paraît avoir franchi un cap essentiel pour l'étude comparative des théories logiques : la considération simultanée de plusieurs systèmes dans un même dialogue promet des développements importants. L'étude de diverses logiques IF, dont la sémantique des jeux est partie intégrante, est en train de devenir un programme de recherche avec ses questions propres, logico-mathématiques, philosophiques et linguistiques. Enfin le domaine de recherche de l'école hollandaise est en forte expansion, et il semble raisonnable de faire l'hypothèse que les questions qu'elle soulève sont suffisamment générales – et que l'approche mathématique en est suffisamment bien définie – pour que ce travail pionnier puisse résulter en une sous-discipline des mathématiques se situant à l'intersection de la combinatoire, de la logique mathématique et de la théorie mathématique des jeux.

Dans la mesure où la dialogique et GTS poursuivront le chemin qu'elles ont suivi jusqu'ici, elles resteront des approches internes à la logique. Par contraste, l'approche de l'école hollandaise peut mener dans une direction où le sujet cesse d'être strictement logique, ou ne demeure logique que de manière métaphorique. Jusqu'ici la logique dialogique et l'approche de GTS ont été philosophiquement fécondes et ont aussi, du moins pour GTS, directement inspiré des travaux en linguistique. S'il est bien admis que la motivation de l'école hollandaise est intrinsèquement logico-mathématique plutôt que philosophique, il n'en est pas moins vrai que l'un des enjeux pour cette dernière sera d'incorporer une analyse philosophique à son approche théorique, ou tout au moins dans la discussion des motivations pour lesquelles on accorde le statut de logique aux multiples systèmes construits à partir de jeux.

4 Présentation des contributions

Ce cahier spécial de *Philosophia Scientiæ* vise à donner un aperçu général des travaux actuels sur l'usage des jeux en logique, notamment à destination du public francophone. Les recherches ici présentées ont été regroupées en trois parties, qui correspondent aux trois approches signalées plus haut.

Première partie. Logique dialogique Dans *Dialogique temporelle et hybridation*, Laure Damien, Marie-Hélène Gorisse et Shahid Rahman proposent une interprétation dialogique de la logique temporelle. Après avoir indiqué les dialogues correspondant à différentes structures temporelles (le temps discret, dense, connecté), les auteurs présentent une

extension « hybride » de la dialogique temporelle qui permet d'expliciter certaines propriétés jusque-là non exprimables de la structure. Cet article propose donc une application particulière de la dialogique modale, avec un exposé des tableaux stratégiques correspondants. Les auteurs concluent sur une comparaison avec la stratégie de Hintikka pour l'introduction des relations d'accessibilité en logique modale.

L'article de Laurent Keiff, *Heuristique formelle et logiques modales non-normales*, explore le champ des logiques non-normales. L'idée est celle d'une logique modale étendue qui permette d'exprimer non seulement le fait qu'à différents contextes (ou « mondes possibles ») correspondent différentes propositions, mais aussi qu'un changement de contexte puisse se traduire par un changement de logique. Les dialogues mis en œuvre par l'auteur sont en fait des « méta-dialogues » qui portent sur la structure même de l'interprétation, plus précisément sur la relation d'accessibilité entre les contextes relativement auxquels le langage est interprété. Cette recherche sur les « *Structure Seeking Dialogues* » illustre parfaitement la fonction de la dialogique comme cadre général et pluraliste permettant la comparaison entre différentes logiques : il ne s'agit plus ici seulement de comparer (de l'extérieur) les écarts entre règles de différents jeux, mais de construire des dialogues au cours desquels les règles changent.

Dans son article *Logiques dialogiques « multivalentes »*, Helge Rückert montre que le cadre dialogique peut aussi s'étendre au cas des logiques multivalentes, et ce bien qu'aucune valeur de vérité n'y apparaisse explicitement. Pour cela, l'auteur a recours à la distinction entre différents modes d'assertion. Il propose une version dialogique de la logique trivalente de Łukasiewicz et, exploitant la souplesse du cadre dialogique, en offre une version intuitionniste. Après quelques exemples, l'auteur présente les tableaux stratégiques correspondants. Là encore, ce travail montre très clairement la richesse des jeux dialogiques et leur capacité à traiter de logiques très variées.

Le lecteur trouvera enfin dans l'Appendice *Introduction à la dialogique modale et hybride* une présentation générale de plusieurs notions de base en logique dialogique par Laurent Keiff.

Seconde partie. Théorie sémantique des jeux (GTS) Dans son article *Preuves et jeux sémantiques*, Denis Bonnay essaye de montrer l'existence d'un lien entre les jeux sémantiques de Hintikka pour la logique du premier ordre et les jeux de preuve. Pour y parvenir, il introduit une modification des jeux sémantiques où le vérificateur a le droit de retourner en arrière et modifier ses choix, en fonction de l'information ob-

tenue concernant la stratégie suivie par le falsificateur. L'existence d'une stratégie gagnante pour le vérificateur d'un tel jeu associé à un énoncé du premier ordre caractérise la vérité de l'énoncé par rapport à un modèle donné. En utilisant ces jeux, Bonnay montre comment obtenir une stratégie gagnante du vérificateur dans son jeu sémantique modifié à partir de la preuve d'un tel énoncé. L'approche de Bonnay se concentre sur la validité (la vérité logique) et sur la relation de conséquence logique, au sens où il étudie ce qui suit logiquement d'axiomes donnés. L'article comporte une discussion philosophique de la signification théorique générale des problèmes discutés.

Dans son article *On Independence-Friendly Fixpoint Logics*, Julian Bradfield introduit et étudie une extension aux points fixes de la logique IF du premier ordre. Pour l'interprétation de la logique IF elle-même, Bradfield utilise la sémantique compositionnelle de [Hodges 1997], qui fournit une interprétation à toutes les formules de la logique IF – et qui ne se restreint pas aux énoncés comme le fait la sémantique standard non compositionnelle de Hintikka et Sandu, définie en termes de jeux sémantiques. La logique IF ainsi définie est ensuite étendue par des opérateurs de points fixes. Dans l'article, l'expressivité de la logique IF à points fixes est étudiée, et la question de sa complexité est traitée. Les jeux de « *model-checking* » pour cette logique sont définis. Bradfield discute aussi la question de savoir comment étendre la logique modale IF, définie et étudiée dans [Bradfield 2000] et [Bradfield & Fröschle 2002], à un mu-calcul modal IF.

Dans sa contribution *Sur les « Opérateurs rétrogrades »*, Tero Tulenheimo propose un système de logique multimodale, temporelle et épistémique, qui (pour la dimension temporelle) reprend et étend l'approche de Prior des temps grammaticaux comme opérateurs logiques. Une interprétation sémantique en termes de jeux est définie pour ce système. Mettant à profit la distinction entre dépendance logique entre opérateurs et dépendance temporelle liée à l'interprétation des opérateurs, le système proposé accroît l'expressivité des systèmes multimodaux habituels correspondants et, comme le montre l'auteur, atteint l'expressivité d'un système de logique hybride. L'article se conclut sur une discussion de l'intérêt théorique de cette approche, qui n'est pas tant lié au gain d'expressivité qu'à l'importance révélée des deux types de relations de dépendance entre opérateurs.

Troisième partie. Logique des jeux Dans leur article *Diversity of Logical Agents in Games*, Johan van Benthem et Fenrong Liu discutent la question de la caractérisation logique des variations qui peuvent apparaître dans les capacités épistémiques des agents (les joueurs) des jeux.

Une supposition idéalisée typique est que les agents sont épistémiquement parfaits au sens où ils connaissent toujours parfaitement ce qui s'est produit dans le jeu. A l'opposé, l'article discute de la manière dont on peut modéliser avec exactitude les imperfections auxquelles les agents peuvent être sujets. Les possibilités considérées se trouvent entre deux extrêmes : les agents à rappel parfait et les agents à mémoire limitée. On peut concevoir des jeux dont les agents sont de types mixtes, certains plus limités que d'autres. La morale de l'article est de montrer que ce n'est pas seulement pour rendre les jeux étudiés par la logique plus réalistes qu'il faut étudier les limitations épistémiques des joueurs, mais aussi parce qu'il est possible de le faire de manière intéressante d'un point de vue mathématique.

Paul Harrenstein introduit dans son article *Logical Consequence and the Theory of Games* une généralisation de la relation de conséquence logique de la logique propositionnelle en utilisant des outils de la théorie des jeux, plus exactement en généralisant l'idée d'équilibre de Nash de la théorie classique des jeux. Harrenstein interprète les ensembles de formules de la logique propositionnelle (les théories) comme des relations de préférence, le rôle des joueurs – qui sont en quantité quelconque dénombrable – étant de contrôler des sous-classes disjointes d'atomes propositionnels, à raison d'une classe par joueur. L'article est une bonne illustration des possibilités de développements ouvertes par l'interaction libre entre logique et théorie des jeux.

L'article de Robert van Rooij, *Cooperative versus argumentative communication*, adopte le cadre théorique fourni par la théorie des jeux et l'utilise pour discuter certaines des questions centrales de la pragmatique – des questions se rapportant à la théorie de l'usage linguistique. L'auteur dresse une comparaison entre deux théories rivales de la communication : selon l'une de ces théories, la communication est quelque chose de coopératif, tandis que l'autre approche considère que ce qui est essentiel pour la communication est l'argumentation. Les jeux apparaissent ici comme utiles pour modéliser ce qui se passe dans les situations de communication. L'évaluation des deux approches de la communication par van Rooij est basée sur une comparaison de leurs succès respectifs dans l'analyse des implicatures des expressions, des éléments d'information pragmatiquement transmis par les expressions qui ne sont pas considérés comme des parties propres de leur signification sémantique.

Les références citées dans les articles de ce cahier, comme celles de cette introduction, sont rassemblées en une bibliographie commune à la fin du volume.