PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

PIERRE SAMUEL

Compléments à un article de Hans Grauert sur la conjecture de Mordell

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 55-62
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1966__29__55_0>

COMPLÉMENTS A UN ARTICLE DE HANS GRAUERT SUR LA CONJECTURE DE MORDELL

par Pierre SAMUEL

Hans Grauert a donné récemment une belle démonstration algébrique de l'analogue de la conjecture de Mordell pour les corps de fonctions ([2]), dont une grande partie est valable en caractéristique $p \neq 0$. Nous résolvons ici les problèmes laissés ouverts par lui en caractéristique p, et montrons que tous les contre-exemples proviennent des courbes définies sur des corps finis et de leurs endomorphismes de Frobenius. Nous en profitons pour donner une version simplifiée de la fin de l'article de Grauert (i.e. de son § 4, n^{os} 3 et 4), utilisant la théorie des modules des courbes algébriques. Je remercie mon ami J.-P. Serre de ses intéressantes suggestions.

L'énoncé du théorème de Grauert (démontré aussi par Manin par voie transcendante) est :

Théorème. — Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique o, K *un corps de fonctions algébriques sur k, et* C *une courbe définie sur* K, *de genre* $\geqslant 2$, *et telle que l'ensemble* C_K *de ses points rationnels sur* K *soit infini. Alors il existe une courbe* C' *définie sur k et un* K*-isomorphisme* $f: C \to C'$. *De plus presque tous les points de* C_K *appartiennent à* $f^{-1}(C'_k)$, i.e. $C'_K - C'_k$ *est fini.*

La dernière assertion n'est pas explicitement chez Grauert, mais nous verrons en chemin qu'elle est conséquence facile de ses résultats. Faisons le point de ceux que nous allons utiliser. Dans ce qui suit, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique p quelconque, K un corps de fonctions algébriques sur k, C une courbe de genre $g \geqslant 2$ absolument non singulière définie sur K, et telle que C_K soit *infini* (rappelons que C_K désigne l'ensemble des points de C rationnels sur K). Soit R un modèle affine de K/k; supposant C plongée dans un espace projectif P_N, prenons un point générique r de R sur k et un point générique y de C sur K; alors le lieu $X \subset R \times P_N$ de (r, y) sur k est (si on remplace R par un ouvert affine suffisamment petit) une variété fibrée sur R par des courbes X_t ($t \in R$), toutes irréductibles et de même genre $g \geqslant 2$ que C [1]; notons π la projection $X \to R$. Alors les points de C_K correspondent aux *sections rationnelles* $s: R \to X$ de cette variété fibrée. Grauert a démontré sous ces hypothèses :

---

[1] L'irréductibilité et la non-singularité de X_t sont démontrées dans Lang, *Introduction to algebraic geometry* (Interscience Publ., 1958), chap. VIII. L'égalité des genres se trouve, par exemple, dans Igusa, Arithmetic genera..., *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 41* (1955), 34-37, lemma 2.

(G. 1) Il existe un champ E de sections infinitésimales de $X \to R$ et un seul (c'est-à-dire une section du fibré $F \to X$ des (dim R)-plans tangents à X et transversaux aux fibres de $X \to R$). De plus presque toutes les sections rationnelles $s : R \to X$ sont tangentes au champ E. Précisons que E donne en chaque point x de X un homomorphisme E_x de l'espace tangent $T(R)_{\pi(x)}$ à la base dans l'espace tangent $T(X)_x$ tel que $T(\pi)_x \circ E_x$ soit l'identité.

(G. 2) Pour tout entier $j \geqslant 0$, il existe une courbe $C^{(j)}$ définie sur K^p et un K-isomorphisme $f_j : C \to C^{(j)}$.

Ici K^p intervient comme l'intersection des noyaux des k-dérivations de K, de sorte que, si $p=0$, on a $K^p = k$. Alors on a un K-isomorphisme f de C sur une courbe C' définie sur k; les points de C'_K correspondent aux applications rationnelles de R dans C', i.e. aux sections du fibré trivial $X' = R \times C'$; sur celui-ci l'unique champ E' de sections infinitésimales est le champ « horizontal »; par (G. 1) presque toutes ces sections sont tangentes à E', donc sont constantes; ceci démontre que $C'_K - C'_k$ est bien fini.

1. Quelques préliminaires.

Théorème 1. — *Soient* V *une variété et* D *une courbe de genre* $g \geqslant 2$ *définies sur un corps algébriquement clos k. Alors les applications rationnelles définies sur k séparables non constantes* $V \to D$ *sont en nombre fini.*

En effet, pour presque toute $f : V \to D$, le graphe de f dans $V \times D$ est, comme ci-dessus, tangent au champ horizontal (i.e. section de $V \times D \to V$) du produit. Or ceci veut dire que la différentielle de f est nulle, donc que f est constante ou inséparable.

Corollaire (Schwarz-Klein). — *Si* D *est une courbe de genre* $g \geqslant 2$ *définie sur un corps k algébriquement clos, le groupe* $\mathrm{Aut}_k(D)$ *est fini.*

Soient k un corps algébriquement clos, p sa caractéristique, et K un corps de fonctions algébriques sur k. Nous dirons qu'un corps intermédiaire L est *séparablement contenu* dans K si K est extension séparable de L. Si $p \neq 0$, ceci implique $L \not\subset K^p$; réciproquement, si $L \not\subset K^p$ et si L est de degré de transcendance 1 sur k, alors L contient un élément d'une p-base de K sur K^p, c'est-à-dire un élément d'une base de transcendance séparante de K/k, de sorte que L est séparablement contenu dans K.

Théorème 2 (Severi). — *Soient k un corps algébriquement clos et* K *un corps de fonctions algébriques sur k. Les corps intermédiaires* L *qui sont séparablement contenus dans* K, *de degré de transcendance* 1 *sur k et de genre* $\geqslant 2$, *sont en nombre fini.*

On notera que le théorème 2 redonne le théorème 1 si on y fixe la classe d'isomorphisme de l'extension L de k.

Montrons d'abord comment une récurrence sur $n = \dim_k K$ nous ramène au cas $n=1$. Soit K' un sous-corps de K, algébriquement fermé dans K et tel que $\dim_k K' = n-1$ (il en existe). Comme K' est extension de type fini de k (en tant que sous-extension de K, cf. Bourbaki, *Alg.*, V, § 5, exer. 7), les corps intermédiaires L de l'énoncé qui sont contenus dans K' sont en nombre fini par récurrence. Pour les autres corps intermédiaires L, on considère une clôture algébrique K'' de K', et les sous-corps $K''(L)$ de $K''(K)$; comme L et K'' sont algébriquement disjoints sur k et sont extensions régulières de k, L et K'' sont linéairement disjoints sur k, de sorte que $K''(L)$ est de genre $\geqslant 2$ sur K'' ([1], chap. V, th. 5). Comme $K''(L) \not\subset K''(K)^p$, $K''(L)$ est séparablement contenu dans $K''(K)$. Donc, par le cas $n=1$, il n'y a qu'un nombre fini de corps $K''(L)$. Enfin, soient L_1 et L_2 deux corps intermédiaires comme dans l'énoncé et tels que $K''(L_1)=K''(L_2)$; notant C_1 et C_2 des modèles de L_1 et L_2 définis sur k, les isomorphismes de C_2 sur C_1 sont en nombre fini (cor. du th. 1), donc sont définis sur k; or C_1 et C_2 sont K''-isomorphes; on a donc un k-isomorphisme f de L_1 sur L_2; d'après la disjonction linéaire celui-ci se prolonge en un K''-automorphisme f'' de $K''(L_1)=K''(L_2)$; mais f'' ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (cor. du th. 1). Ceci achève la réduction au cas $n=1$.

Pour $n=1$, la démonstration qui suit est essentiellement celle de Severi ([5], p. 271). Soit C un modèle projectif non singulier de K, et soit g son genre. Si γ est le genre d'un corps L séparablement contenu dans K, et si $m=[K:L]$, la formule d'Hurwitz-Zeuthen ([1], p. 106, cor. 2) donne

$$2g-2=m(2\gamma-2)+\deg(\mathfrak{D})$$

où $\mathfrak{D}$ est la différente de K sur L; on a donc $m(2\gamma-2)\leqslant 2g-2$, d'où seulement un nombre fini de valeurs possibles pour m et γ, car $\gamma\geqslant 2$. On peut donc supposer m et γ fixés. Si Γ est un modèle projectif non singulier de L, l'inclusion $L\to K$ donne un morphisme séparable $u: C\to\Gamma$ de degré m (c'est un morphisme car C est une courbe non singulière et Γ est complète). Pour $x\in C$, posons $T(x)=u^{-1}(u(x))$; c'est un diviseur positif de degré m sur C, sans composantes multiples si x est générique. On peut considérer T comme une correspondance, c'est-à-dire comme un diviseur sur $C\times C$; elle est symétrique, d'indices (m, m) (les indices d'une correspondance étant ses nombres d'intersection avec une verticale et une horizontale génériques de $C\times C$), et sans composantes multiples; identifiant un ensemble fermé de $C\times C$ avec le cycle sans composantes multiples dont il est le support, on voit aussitôt que T est le graphe de la relation d'équivalence $u(x)=u(y)$. On a donc $T\circ T\subset T$ (ensemblistement), d'où $T\circ T=mT$ car $T\circ T$ est une correspondance d'indices (m^2, m^2) (nous utilisons sans avertissement, ici et dans la suite, les formules sur les correspondances contenues dans [6], II, § 1 et début de § 2). La diagonale Δ est composante de T. Posons $T=S+\Delta$, où S est une correspondance symétrique. De $T\circ T=mT$, on tire aussitôt $S\circ S=(m-2)S+(m-1)\Delta$. D'autre part le diviseur $\mathrm{pr}_1(S.\Delta)$ n'est autre que la différente $\mathfrak{D}$, de sorte que $(S.\Delta)=2g-2-m(2\gamma-2)$. On en tire $(S.S)=((S\circ S).\Delta)=(m-2)(2g-2-m(2\gamma-2))-(m-1)(2g-2)$ (car le nombre de self-intersection de Δ est $2-2g$); d'où $(S.S)=-(2g-2)-m(m-2)(2\gamma-2)$, qui est <0 car $g\geqslant\gamma\geqslant 2$.

Supposons que S varie dans une famille algébrique irréductible I de diviseurs sur $C\times C$ telle que $\dim I\geqslant 1$. Si toutes les composantes de S sont mobiles, on a $(S.S)\geqslant 0$, contrairement à l'inégalité $(S.S)<0$. En général S est somme d'une partie fixe F et d'une partie mobile M, toutes deux symétriques. On a

$$S \circ S = F \circ F + F \circ M + M \circ F + M \circ M = (m-2)F + (m-2)M + (m-1)\Delta.$$

Comme $(m-2)M$ n'a pas de partie fixe et que $F \circ F$ est fixe, on a

$$F \circ F \leqslant (m-2)F + (m-1)\Delta,$$

de sorte que $G = F + \Delta$ est le graphe d'une relation d'équivalence sur C. Comme G n'a pas de composante multiple, la courbe lieu des diviseurs $G(x)$ (dans une puissance symétrique convenable de C) est le quotient de C par cette relation d'équivalence; notons C′ cette courbe quotient et g' son genre. Comme l'équivalence G est contenue dans l'équivalence T, le morphisme $u : C \to \Gamma$ se factorise à travers C′ :

$$C \xrightarrow{v} C' \xrightarrow{u'} \Gamma$$

de sorte que $g' \geqslant \gamma \geqslant 2$. Le graphe dans $C' \times C'$ de la relation d'équivalence $u'(x) = u'(y)$ est $(v \times v)(G)$ (au sens ensembliste), de sorte que toutes ses composantes distinctes de la diagonale sont mobiles (car v est surjective). Or on a vu plus haut que c'est impossible.

Par conséquent S ne peut varier dans une famille algébrique irréductible de dimension $\geqslant 1$. Or les diviseurs sur $C \times C$ d'indices donnés se répartissent en un nombre *fini* de familles algébriques irréductibles (en effet, dans un plongement projectif à la Segre de $C \times C$, ces diviseurs sont des cycles de dimension 1 et de degré donné). D'autre part la relation $S \circ S = (m-2)S + (m-1)\Delta$, qui exprime que $S + \Delta$ est une équivalence, est algébrique par rapport aux coordonnées de Chow de S. Donc nos diviseurs S se répartissent en un nombre fini de familles algébriques irréductibles. Ils forment donc un ensemble fini. Comme le sous-corps L est uniquement déterminé par le diviseur S (c'est le corps des fonctions de la courbe lieu du diviseur $(x) + S(x)$, $x \in C$), notre assertion est démontrée.

Théorème 3. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$,* D *une courbe définie sur k, n un entier $\geqslant 1$, et $q = p^n$. La courbe* D *est k-isomorphe à D^q, si et seulement si* D *est k-isomorphe à une courbe* D′ *définie sur le corps fini $\mathbf{F}_q$.*

On rappelle que les équations de D^q s'obtiennent en élevant à la puissance q-ième les coefficients des équations de D. Soit k' une extension de type fini de la clôture algébrique k_0 du corps premier, contenue dans k, et qui soit corps de définition de D et de l'isomorphisme $D \to D^q$. La théorie des modules ([3]) nous fournit une application m de « l'ensemble » U des courbes de genre donné dans une variété M telle que : *a)* $m(C) = m(C')$ si et seulement si C et C′ sont birationnellement équivalentes (i.e. isomorphes sur un corps convenable); *b)* si C est définie sur un corps K, alors le point $m(C)$ est rationnel sur $k_0(K)$. Par élévation à la puissance q^j-ième, l'isomorphisme $D \to D^q$ donne un isomorphisme $D^{q^j} \to D^{q^{j+1}}$, de sorte que D est k'-isomorphe à D^{q^j} pour tout j. On voit donc que $m(D)$ est rationnel sur $\bigcap_{j=1}^{\infty} k'^{q^j} = k_0$ (car D^{q^j} est définie sur k'^{q^j}). Ainsi D est isomorphe à une courbe D″ définie sur un corps fini, et l'isomorphisme $D \to D^q$ donne un isomorphisme $D'' \to D''^q$; par spécialisation du graphe de cet isomorphisme, on peut supposer ce dernier défini sur k_0, donc sur un corps fini. Soit donc F un corps fini de définition de D″ et d'un isomorphisme $f: D'' \to D''^q$; on peut supposer que F contient $\mathbf{F}_q$. Par descente galoisienne ([4], chap. V, § 4, n° 20), et utilisation du fait que le groupe de Galois de F sur $\mathbf{F}_q$ est engendré par $x \mapsto x^q$, on voit aussitôt que D″ est F-isomorphe à une courbe D′ définie sur $\mathbf{F}_q$. Ainsi on a un isomorphisme $D \to D'$; comme k est algébriquement clos, on obtient, par spécialisation, un isomorphisme $D \to D'$ défini sur k.

2. La conjecture de Mordell en caractéristique $p \neq 0$.

Théorème 4. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, K un corps de fonctions algébriques sur k, C une courbe absolument non-singulière définie sur K, de genre $g \geq 2$, et telle que C_K soit infini. Alors il existe une courbe C′ définie sur k, une extension galoisienne finie K′ de K de groupe G, et un monomorphisme $s \mapsto j_s$ de G dans Aut(C′) tels que C s'obtienne à partir de C′ par descente galoisienne de K′ à K au moyen des automorphismes j_s ($s \in G$)* ([4], V, § 4, n° 20). *Autrement dit, on a un K′-isomorphisme $u: C \to C'$ tel que $j_s = u^s \circ u^{-1}$ pour tout $s \in G$. De plus les points de C_K sont les points de la forme $u^{-1}(x)$, où $x \in C'_{K'}$ et où $x^s = j_s(x)$ pour tout $s \in G$.*

En effet, d'après (G. 2), le point $m(C)$ sur la « variété des modules » M décrite dans le théorème 3 est rationnel sur K^{p^j} pour tout j, donc sur k. Comme dans le théorème 3, on a une courbe C′ définie sur k, et un isomorphisme $u: C \to C'$ défini sur la clôture algébrique de K, et donc sur une extension finie K″ de K. Or, pour $x \in C_K$, on a $u(x) \in C'_{K''}$, de sorte que, si R″ désigne un modèle de K″ sur k, $u(x)$ définit une application rationnelle $g_x: R'' \to C'$; par (G. 2) les graphes dans $R'' \times C'$ de presque toutes les g_x sont tangents au champ horizontal, de sorte que la différentielle de $u(x)$ est nulle et que $u(x)$ est rationnel sur K''^p. On a donc une infinité de points x de C_K tels que $u(x)$ soit rationnel sur K''^p. Comme on peut supposer que C et C′ sont des modèles multicanoniques de même degré, u est alors induite par une transformation projective, et celle-ci est définie sur $K(K''^p)$ (car on peut extraire un repère projectif de l'infinité de points x de C_K ci-dessus). Par applications successives on réduit K″ à la fermeture séparable de K dans K″. Autrement dit on peut supposer K″ *séparable* sur K.

Quitte à agrandir K″, on peut la supposer *galoisienne* sur K. Soit G le groupe de Galois de K″ sur K. Pour $s \in G$, u^s est un K″-isomorphisme de C sur C′; on a donc $h_s = u^s \circ u^{-1} \in \mathrm{Aut}(C')$. On voit aussitôt que $(h_s)_{s \in G}$ est un cocycle, i.e. on a $h_{st} = h_s \circ (h_t)^s$; mais, comme Aut(C′) est fini, ses éléments sont définis sur k, de sorte que $(h_t)^s = h_t$, et que $s \mapsto h_s$ est un homomorphisme de G dans Aut(C′); soit H son noyau. On a $u^s = u$ pour tout $s \in H$, de sorte que u est défini sur le corps des invariants K′ de H. Ce corps K′ est galoisien sur K, de groupe G/H, et on a maintenant un monomorphisme $G/H \to \mathrm{Aut}(C')$. Écrivons désormais G à la place de G/H, et notons $s \mapsto j_s$ ce monomorphisme dans Aut(C'). Par définition on a $j_s = u^s \circ u^{-1}$, de sorte qu'on est bien en situation de descente galoisienne.

Enfin, si $y \in C_K$, on a $x = u(y) \in C'_{K'}$ et $x^s = u^s(y^s) = u^s(y) = u^s(u^{-1}(x)) = j_s(x)$ pour tout $s \in G$. Réciproquement, si x est un point de $C'_{K'}$ tel que $x^s = j_s(x)$ pour tout $s \in G$, le point $y = u^{-1}(x)$ est, *a priori*, dans $C_{K'}$; mais, de $x = u(y)$, on déduit $x^s = u^s(y^s) = j_s(u(y^s))$, d'où $j_s(x) = j_s(u(y^s))$ et $x = u(y^s)$ car j_s est injectif; on a donc $y^s = u^{-1}(x) = y$ pour tout $s \in G$, ce qui montre que y est rationnel sur K. Le théorème 4 est donc entièrement démontré. C.Q.F.D.

Remarquons que, si Aut(C')(= Aut(C)) est trivial, alors C est K-isomorphe à C'.

Nous sommes maintenant en mesure de savoir si presque tous les points de C_K « proviennent de k ». Gardons les hypothèses et notations du théorème 4. Supposons d'abord G *non trivial* (i.e. $K' \neq K$). Les points x de C'_k tels que $x^s = j_s(x)$ pour tout $s \in G$ sont en nombre fini car on a alors $j_s(x) = x^s = x$ et un automorphisme non trivial d'une courbe n'a qu'un nombre fini de points fixes. Donc $C'_{K'} - C'_k$ est infini dans ce cas.

Voyons, en général, quand $C'_{K'} - C'_k$ peut être infini. Un point x de $C'_{K'} - C'_k$ est un point générique de C' sur k (car C' est de dimension 1), et s'interprète donc comme un k-isomorphisme g_x de $k(C')$ sur un sous-corps L_x de K'. Pour un tel point x, notons $q(x)$ la plus grande puissance q de p telle que $L_x \subset K'^q$; elle existe car $\bigcap_{j=1}^{\infty} K'^{p^j} = k$; on a alors $L_x \not\subset (K'^{q(x)})^p$, de sorte que L_x est séparablement contenu dans $K'^{q(x)}$. Ainsi $L_x^{q(x)^{-1}}$ est séparablement contenu dans K'. Or les $L_x^{q(x)^{-1}}$ sont tous des corps de même genre $\geqslant 2$. Le théorème de Severi (n° 1, th. 2) montre qu'ils sont en nombre fini. Remplaçant K' par K'^q, on voit de même que les L_x tels que $q(x)$ ait la valeur donnée q sont en nombre fini. Donc, si $C'_{K'} - C'_k$ est infini, il existe deux points x et y de cet ensemble tels que $L_x^{q(x)^{-1}} = L_y^{q(y)^{-1}}$, et que $q(x) \neq q(y)$ (on notera que, comme Aut(C') est fini, il n'y a qu'un nombre fini de k-isomorphismes $g_x : k(C') \to L_x$ d'image donnée). Supposons, par exemple, $q(x) > q(y)$, et posons $q = q(x)/q(y)$, qui est une puissance de p à exposant >0; on a alors $L_x = L_y^q$, de sorte que $k(C')$ est k-isomorphe à $k(C'^q)$. Le théorème 3 du n° 1 montre alors que C' est k-isomorphe à une courbe définie sur le corps fini $\mathbf{F}_q$. Nous avons donc démontré une partie du théorème suivant :

Théorème 5. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique* $p \neq 0$, K *un corps de fonctions algébriques sur k, et* C *une courbe absolument non singulière définie sur* K, *de genre* $g \geqslant 2$.

a) *Supposons que* C *ne soit isomorphe à aucune courbe définie sur un corps fini* (i.e. « *que* C *soit à modules transcendants* »); *pour que* C_K *soit infini, il faut et il suffit qu'il existe une courbe* C' *définie sur k et un* K-*isomorphisme* $u : C \to C'$; *dans ces conditions* $C_K - u^{-1}(C'_k)$ *est fini.*

b) *Supposons que* C *soit isomorphe à une courbe* C' *définie sur un corps fini et soit* $\mathbf{F}_q$ *un corps fini de définition commun à* C' *et aux éléments de* Aut(C'); *notons* $f : C' \to C'$ *l'endomorphisme « de Frobenius itéré » défini par* $f(x) = x^q$. *Pour que* C_K *soit infini, il faut et il suffit qu'il existe une extension galoisienne finie* K' *de* K, *un* K'-*isomorphisme* $u : C \to C'$, *un mono-*

morphisme $s \mapsto j_s$ *du groupe de Galois* G *de* K'/K *dans* $\mathrm{Aut}(C')$ *tel que* $j_s = u^s \circ u^{-1}$ *pour tout* $s \in G$, *et un point* z *de* $C'_{K'} - C'_k$ *tel que* $j_s(z) = z^s$ *pour tout* $s \in G$. *Dans ces conditions il existe une famille finie* $(x_i)_{i \in I}$ *de points de* $C'_{K'}$ *tels que* $x_i^s = j_s(x_i)$ *pour tout* $i \in I$ *et tout* $s \in G$, *et que tout point de* C_K *soit, ou bien de la forme* $u^{-1}(f^n(x_i))$ *avec* $n \geqslant 0$, *ou bien* (*et ceci seulement si* $K' = K$) *de la forme* $u^{-1}(x)$ *avec* $x \in C'_k$.

Dans le cas *a)*, la suffisance est évidente car C_k est infini. La nécessité a déjà été vue, ainsi que la finitude de $C'_K - C'_k$, donc de $C_K - u^{-1}(C'_k)$.

Dans le cas *b)*, la nécessité de nos conditions a été démontrée dans le théorème 4. Montrons leur suffisance. Si $K' = K$, C_K est infini car il contient $u^{-1}(C'_k)$. Supposons donc $K' \neq K$. Le point z est transcendant sur k, de sorte que $k(z)$ est k-isomorphe à $k(C')$. Comme j_s est défini sur $\mathbf{F}_q$ il est lié au « Frobenius » f par $f \circ j_s = j_s \circ f$. Les points $z_n = f^n(z)$ $(n \geqslant 0)$ sont des points de $C'_{K'}$, deux à deux distincts car z est transcendant sur k; on a, pour tout $s \in G, j_s(z_n) = i_s f^n(z) = f^n j_s(z) = f^n(z^s) = (z^s)^{q^n} = (z^{q^n})^s = (z_n)^s$; d'où $u^{-1}(z_n) \in C_K$ d'après le théorème 4. Les points $u^{-1}(z_n)$ forment donc une partie infinie de C_K.

Reste l'assertion décrivant les points de C_K. Il revient au même de décrire les points x de $C'_{K'}$ tels que $j_s(x) = x^s$ pour tout $s \in G$. Ceux qui sont rationnels sur k sont en nombre fini si $K' \neq K$, et forment C_k tout entier si $K' = K$. On peut donc se borner aux points x qui sont transcendants sur k. Un tel point s'interprète comme un k-isomorphisme g_x de $k(C')$ sur un sous-corps L_x de K'. Or, par application répétée du théorème de Severi (n° 1, th. 3), les sous-corps L_x tels que $L_x \not\subset K'^q$ sont en nombre fini; comme chacun n'admet qu'un nombre fini de k-automorphismes, les isomorphismes g_x correspondants sont en nombre fini; parmi les points x correspondants, soit $(x_i)_{i \in I}$ la famille de ceux qui vérifient $j_s(x) = x^s$ pour tout $s \in G$. Soit alors y un point de $C'_{K'}$, transcendant sur k et tel que $j_s(y) = y^s$ pour tout $s \in G$; notons n le plus grand entier tel que $k(y) \subset K'^{q^n}$; alors le point $f^{-1}(y) = y^{q^{-n}}$ est un point de C' (car C' est définie sur $\mathbf{F}_q$) et est rationnel sur K'. De plus la relation $j_s(y) = y^s$ implique comme ci-dessus qu'on a $j_s(f^{-n}(y)) = (f^{-n}(y))^s$, car f^{-n} et j_s sont permutables. Donc $f^{-n}(y)$ est l'un des points x_i, soit $f^{-n}(y) = x_{i_0}$; on a alors $y = f^n(x_{i_0})$, ce qui termine la démonstration.

3. Cas des courbes qui ne sont pas absolument non-singulières.

On sait qu'il existe, en caractéristique $p \neq 0$, des courbes C définies sur un corps de fonctions K, de genre $\geqslant 2$ sur ce corps, et dont le modèle K-normal ne reste pas normal sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Le genre d'une telle courbe s'abaisse d'ailleurs si on passe de K à $\overline{K}$ (cf. [4], chap. IV, § 2, n° 6, ex. p. 73). Ce phénomène est en grande partie exclu de notre étude; plus précisément :

Théorème 6. — *Soient* k *un corps algébriquement clos de caractéristique* $p \neq 0$, K *un corps de fonctions algébriques sur* k, C *une courbe définie sur* K *et de genre « absolu »* (i.e. *sur* $\overline{K}$) $\geqslant 2$. *Si* C_K *est infini,* C *admet un modèle absolument non-singulier* (i.e. *absolument normal*) *défini sur* K, *de sorte que le genre de* C *sur* K *est égal à son genre absolu.*