R. THEODORESCU

Propriétés ergodiques des processus stochastiques généraux

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 14, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A14_0>

PROPRIETES ERGODIQUES DES PROCESSUS STOCHASTIQUES GENERAUX.

par

R. THEODORESCU (Université de BUCAREST).

I - Situation - Definitions :

$(W,\mathcal{W})$ - espace mesurable, espace des paramètres.

$(X,\mathcal{F})$ espace des etats.

$(X^{(n)},\mathcal{F}^{(n)})$ espace mesurable produit.

Definitions :

(1) $P_{1,1}^{(m,1)} : W \times X^{(m)} \longrightarrow X$ avec condition $m = 0 \Longrightarrow W \times X^{(o)} = W$.

(2) $$P_{1,\ell}^{(m,1)}(c;x^{(m)};A^{(\ell)}) = \int_X P_{1,1}^{(m,1)}(c;x^{(m)};dy_1)\, P_{1,1}^{(m+1,1)}(c;x^{(m)}+y_1;dy_2)$$

$$\dots \int P_{1,1}^{(m+\ell-1,1)}(c;x^{(m)}+ y_1 \dots + y_{\ell-1};dy_\ell) 1_A(\ell)$$

(3) $$P_{1,\ell}^{(m,n)}(c;x^{(m)};A^{(\ell)}) = \int_X P_{1,1}^{(m,1)}(c;x^{(m)};dy)\, P_{1,\ell}^{(m+1,n-1)}(c;x^{(m)}+ y;A^{(\ell)})$$

Equation fonctionnelle fondamentale :

Elle résulte des définitions :

$$P_{1,\ell}^{(m,n)}(c;x^{(m)};A^{(\ell)}) = \int_{X^{(K)}} P_{1,k}^{(m,1)}(c;x^{(m)};dy^{(k)})\, P_{1,\ell}^{(m+k,n-k)}(c;x^{(m)}+ y^{(k)};A^{(\ell)})$$

Coefficient de dépendance :

Fonction réelle $I(k,\ell,m,n,s)$ définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

$$I(k,\ell,m,n,s) = \sup_{\substack{c',c''\in W \\ x^{(k)},y^{(s)}}} \left\|P_{1,\ell}^{(k,n)}(c';x^{(k)};\,.\,) - P_{1,\ell}^{(s,k+n+m-s)}(c'';y^{(s)};\,.\,)\right\|$$

Propriétés des coefficients de dépendance :

$$I(k,\ell,m,n,s) = I(s,\ell,-m,k+n+m-s,k)$$

$$I(k,\ell,m,n+1,s) \leq I(k+1,\ell,m,n,s+1)$$

$$I(k,\ell,m,n,s) \leq I(k,\ell,m,n,s+1)$$

II - Notions d'ergodicité :

k - semi ergodicité au sens fort :

$P_{1,\ell}^{(k,n)}(c;x^{(k)};\ ) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{1,\ell}^{(k,\infty)}(c;x^{(k)};\ .)$ convergence en norme des $\forall\ \ell \in \mathbb{N}^*$

k - ergodicité au sens fort :

$P_{1,\ell}^{(k,n)}(c;x^{(k)};\ ) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{1,\ell}^{(k,\infty)}(.)$ convergence en norme des mesures $\forall\ \ell \in \mathbb{N}$, limite indépendante de c et $x^{(k)}$.

k - ergodicité faible :

si $I(k,\ell,0,n,k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Lorsque k-semi ergodicité au sens fort ou k-ergodicité au sens fort est vraie $\forall$ k, on parle de semi ergodicité au sens fort ou ergodicité au sens fort.

Théorème

$k' \leq k''$

k'' *ergodicité au sens fort* $\Longrightarrow$ k' *ergodicité au sens fort et*

$P_{1,\ell}^{(k',\infty)} = P_{1,\ell}^{(k'',\infty)}$.

III - Quelques théorèmes ergodiques.

Nous définissons un nouveau coefficient de dépendance.

$$I^*(k'+k'',\ell,m,n,s'+k'') = \sup_{\substack{c',c'' \\ x^{(k')},\, y^{(s')},\, z^{(k'')}}} \left\| P_{1,\ell}^{(k'+k'',n)}(c';x^{(k')}+z^{(k'')};\,.) - P_{1,\ell}^{(s'+k'',k'+n+m-s')}(c'';y^{(s')}+z^{(k'')};\,.) \right\|$$

on a trivialement :

$$I^* \leq I \text{ et}$$

$$I^*(k+n,\ell,0,1,k+n) \leq \sum_{j=0}^{n+\ell-1} I^*(k+j,1,0,1,k+j)$$

1 - Ergodicité faible.

Théorème

$I(k,\ell,0,1,k) \leq 1-\eta$ $\eta > 0$ *est nécessaire pour la k ergodicité faible.*

Si ceci est vrai, la condition suivante est suffisante pour l'ergodicité faible ;

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} I^*(k+n,1,0,1,k+n) < +\infty.$$

Théorème

Supposer que $I(k,\ell,0,n+1,k) \leq I(k,1,0,1,k)\, I(k+1,\ell,0,n,k+1)$

(condition vérifiée par chaines de Markov et chaines à liaisons complètes à nombre fini d'états)

et $I(k,\ell,o,1,k) \leq 1-\eta$

alors le processus est faiblement ergodique.

. - Ergodicité forte

Théorème

un processus est k*-fortement ergodique si et seulement si* $I(k,\ell,m,n,k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *uniformément par rapport à* m.

Théorème

La condition $I(k,\ell,0,1,s) \leq 1-\eta$ *pour* $\eta > 0$ $\forall s$ *est necessaire pour la* k*-ergodicité forte.*

la condition $\sum_{n\in \mathbb{N}} I^{*}(k+n,1,0,1,s+n) < \infty$ $\forall s$ *est suffisante si la condition précédente est vraie également.*

Posons :

$$\sup_{\substack{c',c''\\ x^{(k)}}} \left|\left| P_{1,\ell}^{(k,n)}(c';x^{(k)};A^{(\ell)}) - P_{1,\ell}^{(0,k+n+m)}(c'';A^{(\ell)}) \right|\right| = I_1(m,n)$$

$$\sup_{\substack{c',c''\\ x^{(k)}}} \left|\left| P_{1,\ell}^{(k,n)}(c';x^{(k)};A^{(\ell)}) - P_{1,\ell}^{(0,k+n)}(c'';A^{(\ell)}) \right|\right| = I_2(n)$$

Si $I_2(n) \longrightarrow 0$ on a des processus analogues à ceux considérés par Ibragimov.

Théorème

Si $I_2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *le processus est* 0*- ergodique faible (on dit aussi normal au sens faible).*

La condition $I_2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *est necessaire pour que le processus soit ergodique au sens faible.*

Théorème

Pour une chaine à liaison complète $I_2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *est necessaire et suffisante pour l'ergodicité au sens faible.*

BIBLIOGRAPHIE

DOBRUTHIN Theo. Vera. 1956 n° 1 Théorème limite central pour chaines de Markov non homogènes.

UENO Journal Fac Sci. Université de Tokyo. Sect I.1957. 7

IBRAGUNOV Prob. Théory and its applications - 1962 . 7

HAJNAL

KOZNIEROSKA Coll. Math. 1962 Vol. 9. p 333-346 Suite dans Coll. Maths. 1964.

CHUNG Zeitschrifft für Warscheinlichkeits theorie und Ver. Geb. 1964 - On the Doeblin Condition.

BOTEZ et THEODORESCU On the ergodie Behaviour of discrete Random processus. Rev. Roum. Maths. Pures et appli. 1965 tome X n° 7 p 991-1010