PIERRE BOLLEY
JACQUES CAMUS

Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 1, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___1_A1_0>

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES
ET DEGENERES A UNE VARIABLE

par

Pierre BOLLEY et Jacques CAMUS

Cet article est essentiellement un complément à celui de [1], ceci en vue des applications aux problèmes elliptiques et dégénérés à plusieurs variables.

I. UNE CLASSE D'ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS.

On désigne par $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, les ensembles des nombres complexes, réels positifs et négatifs respectivement.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On notera, pour r entier positif ou nul, $H^r(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre r sur Ω, et $H^r_o(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ (*) dans $H^r(\Omega)$ (cf. [4]).

Etant donnés deux entiers k et $m \geq o$, on définit les espaces de Sobolev avec poids sur Ω :

$$W^m_k(\Omega) = \{u \in H^{m-k}(\Omega) \ ; \ t^k \ u \in H^m(\Omega)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{W^m_k(\Omega)} = (\|u\|^2_{H^{m-k}(\Omega)} + \|t^k u\|_{H^m(\Omega)})^{1/2}.$$

Proposition 1.1 : Pour k et $m \geq 1$, on a :

$$W^m_k(\mathbb{R}) \subset W^{m-1}_{k-1}(\mathbb{R}) \text{ et, } \ W^m_k(\mathbb{R}_+) \subset W^{m-1}_{k-1}(\mathbb{R}_+),$$

algébriquement et topologiquement.

(*) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $\overline{\Omega}$ et à support compact dans Ω (resp. $\overline{\Omega}$). L'espace des distributions sur Ω sera noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration : Pour $\mathbb{R}$: soit $u \in W_k^m(\mathbb{R})$, ceci équivaut à dire que sa transformée de Fourier $\hat{u}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\, u(t)$ vérifie :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} (1+|\tau|)^{m-k}\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}), \\ (1+|\tau|)^m\, D^k\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Il faut établir que ceci implique $(1+|\tau|)^{m-1}\, D_\tau^{k-1}\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$. D'après (1.1), $\hat{u} \in H^k_{Loc}(\mathbb{R})$; on est donc ramené (après localisation) au cas où $\hat{u}$ vérifie (1.1) et Supp $\hat{u} \subset [1,+\infty[$.

On fait alors le changement de variable $\tau = \frac{1}{t}$.

Lemme 1.1 : Si $t = \frac{1}{\tau}$ et si $v(t) = \hat{u}(\tau)$ on a : pour tout entier k,

$$(1.2) \qquad D_\tau^k\ \hat{u}(\tau) = (-1)^k\ t^{k+1}\ D_t^k\ (t^{k-1}\ v(t)\ ).$$

Cette formule est vraie pour k=1 ; on la démontre ensuite par récurrence sur l'entier k.

Posons alors $W(t) = t^{k-1}\ v(t)$; cette fonction satisfait aux conditions suivantes :

$$(1.3) \qquad \begin{cases} t^{-m}\ W(t) \in L^2(\mathbb{R}_+) \\ t^{k-m}\ D_t^k\ W(t) \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ et Supp } W \subset [0,1]. \end{cases}$$

Il est facile de voir que ces conditions impliquent : $t^{\ell-m}\ D_t^\ell\ W(t)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$ pour ℓ=o,...,k. Il en résulte donc que :

$(1+|\tau|)^{m-1}\ D_\tau^{k-1}\ \hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. C.Q.F.D.

- Pour $\mathbb{R}_+$: cela résulte du lemme suivant :

Lemme 1.2 : Il existe un opérateur P (de prolongement) linéaire, continu de $W_k^m(\mathbb{R}_+)$ dans $W_k^m(\mathbb{R})$ tel que pour tout u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+)$, on ait :

$$P\ u\big|_{\mathbb{R}_+} = u$$

dans $W_k^m(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration : Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+)$, on pose :

$$Pu(t) = \begin{cases} u(t) \text{ si } t \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{Max}(k,m)} \alpha_j\, u(-jt) \text{ si } t < 0, \end{cases}$$

les α_j étant des constantes solutions du système :

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{Max}\,(k,m)} \alpha_j\, (-j)^p = 1 \text{ pour } p=-k,\ldots, \mathrm{Max}\,(-1, m-k-1).$$

Ces conditions impliquent que $Pu \in H^{m-k}(\mathbb{R})$ et que $t^k\, Pu \in H^m(\mathbb{R})$ et que :

$$\|Pu\|_{W_k^m(\mathbb{R})} \leq C.\, \|u\|_{W_k^m(\mathbb{R}_+)} ,$$

où C est une constante indépendante de u.

Proposition 1.2 : On a : (i) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration :

(i) Dans une première étape, on tronque : soit ψ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t) = 1$ pour $|t| \leq 1$ et $\psi(t) = 0$ pour $|t| \geq 2$.

On pose $\psi_R(t) = \psi(t/R)$ pour $R > 0$. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R})$, la fonction $u_R = \psi_R.u$ appartient à $W_k^m(\mathbb{R})$ et converge vers u dans $W_k^m(\mathbb{R})$ quand R tend vers $+\infty$.

Dans une seconde étape, on régularise les fonctions u_R , notées maintenant u : soit j appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $j(t) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} j(t)\, dt=1$. On pose $j_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\, j\,(\frac{t}{\varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R})$ à support compact, la fonction $u_\varepsilon = j_\varepsilon * u$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et converge vers u dans $W_k^m(\mathbb{R})$ quand ε tend vers 0, d'après la proposition 1.

(ii) Cela résulte de (i) et du lemme 1.1.

On peut caractériser les espaces de Sobolev avec poids $W_k^m(\mathbb{R}_+)$ de la façon suivante :

Proposition 1.3 : Un élément u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ appartient à $W_k^m(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si $t^k u$ appartient à $H^m(\mathbb{R}_+) \cap H_o^k(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration : On utilise la proposition 1.2 et l'inégalité n° 330 de [5] qui permet d'établir que l'application $v \longmapsto v/t$ est linéaire continue de $H_o^r(\mathbb{R}_+)$ dans $H_o^{r-1}(\mathbb{R}_+)$, pour tout entier $r \geq 1$.

Remarque 1.2 : De ce résultat suit que $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}_+)$ pour $k \geq m$.

II. ETUDE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS ELLIPTIQUES ET DEGENERES.

1°) Notations et hypothèses.

Soit $L \equiv L(t\,;D_t)$ l'opérateur différentiel défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Lu(t) \equiv L(t\,;D_t)\,\{u(t)\} \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}\,(k,m)} P^{m-h}\,(D_t)\,\{t^{k-h}\,u(t)\}$$

où $D_t = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$, et où m et k sont deux entiers ≥ 1 et où :

(i) $P^{m-h}(D_t)$, pour $o \leq h \leq \mathrm{Min}\,(m,k)$ est un opérateur différentiel ordinaire d'ordre $\leq m-h$, à coefficients constants complexes :

$$P^{m-h}\,(D_t) = \sum_{j=o}^{m-h} p_j^{m-h}\,D_t^j\ ,\quad p_j^{m-h} \in \mathbb{C}\ ;$$

(ii) $P^m(\tau)$ est un polynôme de degré m, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Utilisant la transformation de Fourier définie au I, l'opérateur $\hat{L} = \hat{L}(\tau\,;D_\tau)$, transformé de Fourier de l'opérateur L, est défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{L}\,\hat{v}(\tau) = \hat{L}(\tau\,;D_\tau)\,\hat{v}(\tau) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Inf}\,(k,m)} P^{m-h}(\tau)\,\{(-D_\tau)^{k-h}\,\hat{v}(\tau)\}\ ,$$

où $D_\tau = \frac{1}{i}\frac{d}{d\tau}$.

On désignera par $L^* = L^*(t\,;D_t)$ l'opérateur adjoint formel de l'opérateur L qui est défini par : pour tout φ et ψ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} L\varphi(t).\,\overline{\psi(t)}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t).\,\overline{L^{*}\psi(t)}\,dt.$$

L'opérateur L^* est un opérateur différentiel ordinaire du même type que L.

Nous allons étudier les opérateurs $L(t\ ;\ D_t)$ tout d'abord sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}_+$.

2°) Etude sur $\mathbb{R}$ de la classe d'opérateurs L.

D'une façon générale, on désigne par Ker L l'espace des distributions T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que LT = 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

L'opérateur L induit, pour tout entier $p \geq o$, une application linéaire continue de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$. Considéré comme opérateur différentiel, l'opérateur L est d'ordre m en la différentiation et admet pour points singuliers le point t=o à l'ordre k et le point $t = \infty$. Par contre, l'opérateur différentiel $\hat{L}$ est d'ordre k en la différentiation et n'admet, sur $\mathbb{R}$, que le point $\tau = \infty$ pour point singulier en lequel il est du type de Fuchs (cf : [3]). L'équation déterminante en ce point étant :

$$\phi(\rho) = \sum_{h=o}^{\text{Inf}\,(k,m)} P_{m-h}^{m-h}\, i^{k-h}\, \rho(\rho-1)\,\ldots\,(\rho-k+h+1),$$

avec la convention :

$$\rho(\rho-1)\,\ldots\,(\rho-k+h+1) = 1 \text{ pour } h=k.$$

Ainsi l'étude de l'opérateur L sur $\mathbb{R}$ est ramenée par la transformation de Fourier à l'étude de l'opérateur $\hat{L}$ sur $\mathbb{R}$.

Aux espaces $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et $H^p(\mathbb{R})$, on associe respectivement par transformation de Fourier, les espaces :

$$\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}) = \{\hat{v} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\ ;\ (1+|\tau|)^{m+p-h}\, D_\tau^{k-h}\,\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}),\ o \leq h \leq k\},$$
$$\hat{H}^p(\mathbb{R}) = \{\hat{f} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\ ;\ (1+|\tau|)^p\,\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\},$$

munis des normes canoniques. On définit de manière analogue les espaces $\hat{W}_k^{m+p}(\Omega)$ et $\hat{H}^p(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1 : Soit p un entier $\geq$ o et soit r_p le nombre de racines de l'équation $\phi(\rho) = o$ vérifiant :

$$\mathrm{Re}\ \rho > -p + k - m - \frac{1}{2} .$$

On suppose qu'aucune racine de $\phi(\rho) = o$ n'est située sur la droite $\mathrm{Re}\ \rho = -p - m + k - \frac{1}{2}$.

L'opérateur L, considéré comme opérateur linéaire continu de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$ est à indice et son indice est égal à $k-2r_p$.

Remarque 2.1 : Il résulte de ce théorème que l'indice de l'opérateur L, de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$, dépend de p et que, pour p assez grand, il demeure constant et égal à -k.

Remarque 2.2 : Au cours de la démonstration de ce théorème, on montrera que, plus précisément, on a :

(i) si $r_p = o$, alors l'opérateur L est linéaire continu surjectif de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ sur $H^p(\mathbb{R})$, et la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ est égal à k.

(ii) si $r_p = k$ (ce qui a lieu lorsque p est assez grand), alors l'opérateur L est un isomorphisme de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ sur un sous-espace fermé de codimension k de $H^p(\mathbb{R})$.

Démonstration : L'opérateur $\hat{L}$ est du type de Fuchs en $\tau = \infty$, par suite, le comportement des solutions de l'équation :

$$(2.1) \qquad \hat{L}(\tau ; D)\ \hat{v}(\tau) = o,$$

au voisinage de $\tau = \infty$ est fonction des racines ρ_j , j=1,...,k, de l'équation déterminante en $\tau = \infty$, $\phi(\rho) = o$.

En particulier, lorsque l'équation (2.1) est du premier type de Fuchs en $\tau = \infty$, il existe un système fondamental $\{\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k\}$ de solutions dans un voisinage de $\tau = \infty$ de la forme :

(2.2) $$\hat{v}_j(\tau) = \tau^{\rho_j}\ \phi_j\ (\frac{1}{\tau}),$$

pour $|\tau|$ assez grand et $j=1,\dots,k$, et où $\phi_j(\zeta)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de $\zeta = 0$ et non nulle en $\zeta = o$ (*).

Par contre, dans le cas où l'équation (2.1) n'est pas du premier type de Fuchs en $\tau = \infty$ (2ème type de Fuchs), on peut encore donner la forme explicite d'un système fondamental $\{\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k\}$ de solutions dans un voisinage de $\tau = \infty$, mais l'écriture d'un tel système, en général, n'est pas très simple.

Ceci nous amène à introduire un opérateur $\hat{M} = \hat{M}\ (\tau\ ;\ D_\tau)$ avec :

(2.3) $$\hat{M}\ (\tau\ ;\ D_\tau) = \sum_{h=1}^{\mathrm{Min}\ (k,m)} M^{m-h}(\tau)\ \ (-D_\tau)^{k-h}$$

où $M^{m-h}(\tau)$, pour $h=1,\dots$, Inf (k,m), est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, telle que pour $|\tau|$ assez grand, l'équation :

(2.4) $$\{\hat{L}(\tau\ ;\ D_\tau) + \hat{M}\ (\tau\ ;\ D_\tau)\}\ \{\hat{v}(\tau)\} = 0,$$

se réduise à :

(2.5) $$\sum_{h=o}^{\mathrm{Min}\ (k,m)} p^{m-h}_{m-h}\ \ \tau^{k-h}\ (-D_\tau)^{k-h}\ \ \hat{v}(\tau) = 0.$$

Un tel opérateur existe toujours. L'équation (2.5) est une équation d'Euler dont l'équation déterminante est encore $\phi(\rho) = o$. Ainsi, il existe un système fondamental $\{\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k\}$ de l'équation (2.5) au voisinage de $\tau = +\infty$ ou $-\infty$ de la forme :

(2.6) $$\hat{v}_j(\tau) = |\tau|^{\rho_j}\ (\mathrm{Log}\ |\tau|)^{\lambda_j}\ ,$$

pour $|\tau|$ assez grand et $j=1,\dots,k$, et où λ_j est une certaine constante réelle.

On a alors le résultat suivant :

(*) Signalons que ceci a lieu si la condition (suffisante) suivante est vérifiée :

(I) Si $k \geq 2$, aucune des différences $\rho_i - \rho_j$, pour $1 \leq i < j \leq k$ n'est un entier de $\mathbb{Z}$.

Lemme 2.1 : L'opérateur $\hat{L} + \hat{M}$ est linéaire, continu, surjectif de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-)$ sur $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{H}^p(\mathbb{R}_-)$) et la dimension du noyau de $\hat{L}+\hat{M}$ dans $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-)$) est égale à $k-r_p$.

Démonstration : On fait la démonstration sur $\mathbb{R}_+$, sur $\mathbb{R}_-$ la méthode est analogue. Il sera commode de supposer que $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{r_p}$ sont les r_p racines de $\phi(\rho) = o$ satisfaisant à $\operatorname{Re} \rho > -p-m+k-\frac{1}{2}$.

D'après ce qui précède, il existe un système fondamental de solutions $\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_k\}$ de l'équation (2.4) sur $\mathbb{R}$ tel que le comportement des $\hat{v}_j$ au voisinage de $\tau = +\infty$ soit donné par (2.6). Ainsi, il est facile de voir que le noyau de l'opérateur $\hat{L}+\hat{M}$ dans $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ est engendré par la famille $\{\hat{v}_{r_p+1}, \ldots, \hat{v}_k\}$ et donc, sa dimension est $k-r_p$.

On démontre maintenant la surjectivité de l'opérateur $\hat{L}+\hat{M}$. Soit $\hat{f}$ appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$. La fonction

$$\hat{v}(\tau) = -\sum_{j=1}^{r_p} \hat{v}_j(\tau) \int_\tau^{+\infty} \hat{f}(\sigma)\, \overline{\hat{g}_j(\sigma)}\, d\sigma + \sum_{j=r_p+1}^{k} v_j(\tau) \int_0^\tau \hat{f}(\sigma)\, \overline{\hat{g}_j(\sigma)}\, d\sigma \tag{2.7}$$

est solution de l'équation

$$(\hat{L} + \hat{M})\, \hat{v}(\tau) = \hat{f}(\tau) \tag{2.8}$$

sur $\mathbb{R}_+$, où

$$\hat{g}_j(\tau) = (-1)^j \frac{\Delta(\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_{j-1}, \hat{v}_{j+1}, \ldots, \hat{v}_k)}{i^k\, p^m(\tau)\, \Delta(\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_k)} \tag{2.9}$$

pour $j=1,2,\ldots,k$ et où Δ est la notation classique du wronskien. Comme

$$\sum_{j=1}^{k} D_\tau^{k-h}\, \hat{v}_j(\tau)\, \overline{\hat{g}_j(\tau)} = 0$$

pour $h=2,3,\ldots,k$, il suffit de vérifier, pour démontrer que la solution (2.7) appartient à $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ que :

$$- \sum_{j=1}^{r_p} (1+\tau)^{m+p-h}\, D_\tau^{k-h}\, \hat{v}_j(\tau) \int_\tau^{+\infty} \hat{f}(\sigma)\, \overline{\hat{g}_j(\sigma)}\, d\sigma$$

$$+ \sum_{j=r_p+1}^{k} (1+\tau)^{m+p-h}\, D_\tau^{k-h}\, \hat{v}_j(\tau) \int_0^\tau \hat{f}(\sigma)\, \overline{\hat{g}_j(\sigma)}\, d\sigma$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$ pour k=1,2,...,k. Lorsque les racines ρ_j sont distinctes, les $\hat{v}_j(\tau)$ sont de la forme τ^{ρ_j}, sans termes logarithmiques, au voisinage de $\tau = +\infty$ et les inégalités de Hardy [5] permettent alors de terminer cette vérification. Par contre, dans le cas général, les $\hat{v}_j$ sont donnés par (2.6) au voisinage de $\tau = +\infty$, et on ne peut plus conclure aussi facilement par cette méthode. C'est pourquoi, on donne maintenant une démonstration de la surjectivité plus longue, mais générale. Cette démonstration sera faite en trois étapes.

<u>1ère étape</u> : Soit $\hat{f}$ appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ à support dans $[0,T]$ avec $0 \leq T < +\infty$. Il est facile de vérifier qu'une solution du type :

$$-\sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(\tau) \int_\tau^{+\infty} \hat{f}(\sigma)\, \overline{\hat{g}_j(\sigma)}\, d\sigma$$

convient.

<u>2ème étape</u> : Soit $\hat{f}$ appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$, à support dans $[T,+\infty[$ avec T choisi suffisamment grand pour que l'équation (2.8) se réduise à

$$\text{(2.10)} \qquad \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(k,m)} p_{m-h}^{m-h}\, \tau^{k-h} (-D_\tau)^{k-h}\, \hat{v}(\tau) = \frac{p_m^m\, \tau^k}{P^m(\tau)}\, \hat{f}(\tau)$$

sur $[T,+\infty[$.

On fait le changement de variable $t = \operatorname{Log} \tau$ sur l'intervalle $[T,+\infty[$ ce qui ramène l'équation (2.10) à l'équation à coefficients constants

$$\text{(2.11)} \qquad \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(k,m)} p_{m-h}^{m-h} (-1)^{k-h}\, D_t\, (D_t+i) \dots (D_t+i(k-h-1))\, u(t) = h(t)$$

où $u(t) = \hat{v}(\tau)$ et $h(t) = \dfrac{p_m^m\, \tau^k}{P^m(\tau)}\, \hat{f}(\tau)$.

On fait le changement de fonction $u(t) = e^{\alpha t}\, w(t)$ avec $\alpha = -p-m+k-\frac{1}{2}$, ce qui ramène l'équation (2.11) à une équation elliptique" :

$$\text{(2.12)} \qquad \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(k,m)} p_{m-h}^{m-h} (-1)^{k-h} (D_t-i\alpha)\, (D_t+i(1-\alpha)) \dots$$

$$\dots (D_t+i(k-h-1-\alpha))\, w(t) = e^{-\alpha t}\, h(t)$$

son polynôme caractéristique étant en effet $\phi(i\xi + \alpha)$, c'est-à-dire $\phi(i\xi-m-p+k-\frac{1}{2})$ qui est non nul pour ξ réel. Par suite, $e^{-\alpha t}\,h(t)$ appartenant à $L^2(\mathrm{Log}\,T,+\infty)$, il existe $w(t)$ appartenant à $H^k(\mathrm{Log}\,T,+\infty)$ solution de (2.12). La fonction $\hat{v}(\tau) = e^{\alpha t}\,w(t)$ est solution de (2.10) sur $[T,+\infty[$ et appartient à $\hat{W}_k^{m+p}(T,+\infty)$.

Il est ensuite facile, à l'aide des résultats de la 1ère étape, de construire une solution $\hat{v}(\tau)$ de (2.8) sur $\mathbb{R}_+$ et appartenant à $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$.

<u>3ème étape</u> : Les deux étapes précédentes permettent de résoudre le cas général : étant donné $\hat{f}$ appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$, on le décompose en $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ avec $\hat{f}_1$ (resp. $\hat{f}_2$) appartenant à $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ à support dans $[0,T[$ (resp. $[T,+\infty[$). Ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.

Par suite, l'opérateur $\hat{L}+\hat{M}$, considéré comme opérateur de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-)$) dans $\hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\hat{H}^p(\mathbb{R}_-)$) est un opérateur à indice, d'indice $k-r_p$. Donc, l'opérateur :

$$(\hat{v}_1,\hat{v}_2) \longrightarrow ((\hat{L}+\hat{M})\ \hat{v}_1,\ (\hat{L}+\hat{M})\ \hat{v}_2) : \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-) \times \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \hat{H}^p(\mathbb{R}_-) \times \hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$$

est un opérateur à indice, d'indice $2(k-r_p)$. De plus, $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R})$ peut être considéré comme un sous-espace fermé de codimension k de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_-) \times \hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ et $\hat{H}^p(\mathbb{R}_-) \times \hat{H}^p(\mathbb{R}_+)$ s'identifie à $\hat{H}^p(\mathbb{R})$. On en déduit que $\hat{L}+\hat{M}$, considéré comme opérateur de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $\hat{H}^p(\mathbb{R})$ est à indice, d'indice $k-2\,r_p$ (*).

On aura établi le théorème 2.1, si l'on prouve que l'opérateur $\hat{M}$ est un opérateur compact de $\hat{W}_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $\hat{H}^p(\mathbb{R})$. Il suffit pour cela de revenir à la proposition 1.4.

Du théorème 2.1, on déduit que l'image $L\,W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$ est égale à $L\,W_k^{m+p}(\mathbb{R}) = \{f \in H^p(\mathbb{R})\ ;\ \forall g \in \mathrm{Ker}\,L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}),\ \langle f,\bar{g}\rangle_{H^p(\mathbb{R})\times H^{-p}(\mathbb{R})} = 0\}$. On en déduit facilement la remarque (2.2).

On donne maintenant les résultats de régularité associés aux opérateurs L :

(*) Une idée analogue a été utilisée dans [8].

Corollaire 2.1 : Soient p et q deux entiers $\geq$ o tels que l'équation $\phi(\rho) = o$ n'ait pas de zéro dans la bande :

$$-(p+q) - m + k - \frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ \rho \leq - p - m + k - \frac{1}{2} .$$

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et si Lu appartient à $H^{p+q}(\mathbb{R})$, alors u appartient à $W_k^{m+p+q}(\mathbb{R})$. En particulier, on a :

$$\mathrm{Ker}\ L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\ L \cap W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}).$$

En effet, d'après le théorème 2.1, l'indice de l'opérateur L, de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$ et de $W_k^{m+p+q}(\mathbb{R})$ dans $H^{p+q}(\mathbb{R})$ est le même. Par ailleurs, il est évident que :

$$\mathrm{Ker}\ L \cap W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}\ L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}),$$

et que

$$\mathrm{Ker}\ L^{*} \cap H^{-(p+q)}(\mathbb{R}) \supset \mathrm{Ker}\ L^{*} \cap H^{-p}(\mathbb{R}).$$

On en déduit facilement que $\mathrm{Ker}\ L \cap W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\ L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Ker}\ L^{*} \cap H^{-(p+q)}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\ L^{*} \cap H^{-p}(\mathbb{R})$. Le corollaire est une conséquence de ces deux égalités.

On en déduit :

Corollaire 2.2 : Soit p un entier $\geq$ o tel que l'équation $\phi(\rho) = o$ n'ait pas de zéro dans le demi-espace : $\mathrm{Re}\ \rho \leq - p - m + k - \frac{1}{2}$.

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et si Lu appartient à $H^{\infty}(\mathbb{R})$ $(= \bigcap_s H^{s}(\mathbb{R}))$, alors u appartient à $W_k^{\infty}(\mathbb{R}) = \{u \in H^{\infty}(\mathbb{R})\ ;\ t^k u \in H^{\infty}(\mathbb{R})\}$.

En particulier, on a : $\mathrm{Ker}\ L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\ L \cap W_k^{\infty}(\mathbb{R})$.

3°) Etude sur $\mathbb{R}_+$ de la classe d'opérateurs L :

De façon générale, on désigne par $\mathrm{Ker}_+ L$ l'espace des distributions T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ telles que LT = 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Pour p entier $\geq$ o, on désigne par $H^{-p}(\mathbb{R}_+)$ le dual topologique de $H_0^p(\mathbb{R}_+)$ et par $H_0^{-p}(\mathbb{R}_+)$ l'espace des distributions T de $H^{-p}(\mathbb{R})$ à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, cet espace s'identifie canoniquement au dual topologique de $H^p(\mathbb{R}_+)$.

Le nombre de racines à partie imaginaire positive de $P^m(\tau) = 0$ sera noté m_+ .

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1 : Soit p un entier ≥ 0 et soit r_p le nombre de racines de l'équation $\phi(\rho) = 0$ vérifiant :

$$\mathrm{Re}\,\rho > -p - m + k - \frac{1}{2} .$$

On suppose qu'aucune racine de $\phi(\rho) = 0$ n'est située sur la droite $\mathrm{Re}\,\rho = -p - m + k - \frac{1}{2}$.

L'opérateur L, considéré comme opérateur linéaire continu de $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$, est à indice et son indice est égal à $m_+ - r_p$.

Remarque 3.1 : Il résulte de ce théorème que l'indice de l'opérateur L, de $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$, dépend de p et que, pour p assez grand, il demeure constant et égal à $m_+ - k$.

Remarque 3.2 : On déduit facilement du lemme 1.1 et de la remarque 2.2. que si $r_p = o$, c'est-à-dire si toutes les racines de $\phi(\rho) = o$ satisfont $\mathrm{Re}\,\rho < -p - m + k - \frac{1}{2}$, l'opérateur L est linéaire continu surjectif de $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$ et son noyau dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ est de dimension m_+ .

Nous allons donner une démonstration du théorème 3.1 différente de celle donnée dans [2].

3.1. Etude de l'opérateur L sur $(0,T)$, $o < T < +\infty$.

On va démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1 : L'opérateur L, considéré comme opérateur de $W_k^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$ est un opérateur à indice, et son indice est égal à $m-r_p$.

La démonstration sera faite en 3 étapes.

<u>1ère étape</u> : L'opérateur L, de $W_k^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$, est un opérateur à indice.

Il est clair que le noyau de L dans $W_k^{m+p}(0,T)$ est de dimension finie, de sorte qu'il suffit de prouver que l'image $LW_k^{m+p}(0,T)$ est fermée et de codimension finie dans $H^p(0,T)$.

Du théorème 2.1, on déduit, par prolongement, que :

$$L\,W_k^{m+p}(0,T) \subset \Big\{ f \in H^p(0,T) \ ;\ \forall\, g \in \operatorname{Ker} L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(g) = \{o\}\quad \langle f,\bar{g} \rangle_{H^p(0,T) \times [H^p(0,T)]'} = o \Big\}.$$

Réciproquement, soit un tel f dans $H^p(0,T)$; on va construire un prolongement F de f tel que F appartienne à $H^p(\mathbb{R})$ et soit orthogonal à $\operatorname{Ker} L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$.

Soit $\{g_1,\dots,g_s\}$ une base de l'espace vectoriel constitué par les éléments de $\operatorname{Ker} L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$ et à support ponctuel en $\{o\}$. On complète cette base en une base $\{g_1,\dots,g_r\}$ de $\operatorname{Ker} L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$. Les restrictions $g_{s+1}|_{\mathbb{R}-[0,T]},\dots, g_r|_{\mathbb{R}-[0,T]}$ sont linéairement indépendantes dans $H^{-p}(\mathbb{R}-[0,T])$ car si on a une combinaison linéaire :

$$\sum_{j=s+1}^{r} \mu_j\, g_j|_{\mathbb{R}-[0,T]} = 0,$$

alors, $\sum_{j=s+1}^{r} \mu_j\, g_j$ appartient à $\operatorname{Ker} L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$ et son support est contenu dans $[0,T]$. Mais, l'opérateur L n'admet que le point t=0 pour point singulier, par suite, $\sum_{j=s+1}^{r} \mu_j\, g_j$ est à support en $\{o\}$. Donc :

$$\sum_{j=s+1}^{r} \mu_j\, g_j = 0,$$

ce qui implique $\mu_j = 0$ pour $j = s+1,\dots,r$.

Ainsi, il existe des fonctions φ_j appartenant à $H_o^p(\mathbb{R}-[0,T])$ telles que :

$$\langle \tilde{\varphi}_j\ ,\ \bar{g}_i \rangle_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} = \delta_{ij}$$

pour $s+1 \le i,\ j \le r$, $\tilde{\varphi}_j$ désignant le prolongement de φ_j par 0 sur $[0,T]$.

Soit maintenant Pf un prolongement quelconque de f dans $H^p(\mathbb{R})$ et considérons :

$$F = Pf + \sum_{j=s+1}^{r} \mu_j \tilde{\varphi}_j$$

où les μ_j sont des constantes choisies de façon que l'on ait :

$$< F, \bar{g}_j >_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} = < P f, \bar{g}_j >_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} + \mu_j = 0$$

pour $s + 1 \leq j \leq r$. Par ailleurs, on a aussi :

$$< F, \bar{g}_j >_{H^p(\mathbb{R}) \times H^{-p}(\mathbb{R})} = 0$$

pour $1 \leq j \leq s$. L'élément F est donc un prolongement de f dans $H^p(\mathbb{R})$ orthogonal à Ker $L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$. D'après le théorème 2.1, il existe une fonction U, appartenant à $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ telle que L U = F. La restriction $u = U|_{]0,T[}$ appartient à $W_k^{m+p}(0,T)$ et vérifie Lu = f. On en déduit que :

$$L\, W_k^{m+p}(0,T) = \{f \in H^p(0,T)\ ;\ \forall g \in \text{Ker } L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}),\ \text{Supp } g = \{o\},$$
$$< f,\bar{g} >_{H^p(0,T) \times [H^p(0,T)]'} = 0\},$$

ce qui prouve que l'image L $W_k^{m+p}(0,T)$ est fermée et de codimension finie dans $H^p(0,T)$.

<u>2ème étape</u> : Calcul de l'indice de l'opérateur L dans un cas particulier.

Pour cela, on étudie l'équation :

(3.1) $\quad L(t\ ;\ D_t)\, u(t) = 0,$

du point de vue de la théorie de Fuchs en t=0. Cette équation s'écrit aussi :

$$\sum_{\ell=o}^{m} \sum_{h=o}^{\text{Inf}(k,\ell)} \sum_{j=m-\ell}^{\text{Inf}(m-\ell+k-h,m-h)} p_j^{m-h} (-i)^j \binom{j}{j-m+\ell} (k-h) \ldots$$
$$\ldots (k-h-j+m-\ell+1)\, t^{k-h-j+m-\ell}) \frac{d^{m-\ell}u}{dt^{m-\ell}} = 0.$$

Cette équation est du type de Fuchs en t=0 et l'équation déterminante en ce point s'écrit :

$$F(r) \equiv \sum_{\ell=o}^{\text{Min}(k,m)} r(r-1)\ldots(r-m+\ell+1) \sum_{h=o}^{\ell} p_{m-h}^{m-h}\, i^h \binom{m-h}{\ell-h} (k-h)\ldots(k-\ell+1) = 0.$$

Les polynômes F et ϕ sont liés par une certaine relation. Pour cela, on rappelle que :

$$\phi(\rho) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}\,(k,m)} p_{m-h}^{m-h}\, i^{k-h}\, \rho(\rho-1)\ \dots\ (\rho-k+h+1).$$

Posons :

$$\psi(\rho) \equiv \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=o}^{k} p_{m-h}^{m-h}\, i^{k-h}\, \rho(\rho-1)\ \dots\ (\rho-k+h+1) \text{ si } k \leq m\ ; \\ \displaystyle\sum_{h=o}^{m} p_{m-h}^{m-h}\, i^{k-h}\, (\rho-k+m)\ \dots\ (\rho-k+h+1) \text{ si } k \geq m. \end{cases}$$

Avec ces notations, on a :

$$\phi(\rho) \equiv \begin{cases} \psi(\rho) \text{ si } k \leq m\ ; \\ \rho(\rho-1)\ \dots\ (\rho-k+m+1)\, \psi(\rho) \text{ si } k \geq m\ ; \end{cases}$$

et le polynôme $F(r)$ s'écrit alors :

$$F(r) \equiv \begin{cases} i^k\, r(r-1)\ \dots\ (r-m+k+1)\, \psi(-1-r) \text{ si } k < m\ ; \\ i^k\, \psi(-1-r) \text{ si } k \geq m. \end{cases}$$

On fait l'hypothèse suivante :

(I') Aucune des racines ρ_j , pour $j=1,\dots,\mathrm{Min}(k,m)$, de l'équation $\psi(\rho) = 0$ n'est un entier de $\mathbb{Z}$ et si $\mathrm{Min}(k,m) \geq 2$, aucune des différences $\rho_i - \rho_j$, pour $1 \leq i < j \leq \mathrm{Min}(k,m)$, n'est un entier de $\mathbb{Z}$.

On va montrer que si l'opérateur L vérifie la condition (I'), alors la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(0,T)$ est égale à $m-R_p$ où R_p est le nombre de racines de l'équation $\psi(\rho) = o$ satisfaisant à $\mathrm{Re}\,\rho > -m-p+k-\frac{1}{2}$.

Grâce à la condition (I'), on vérifie que l'équation (3.1) est du premier type de Fuchs en t=o et admet un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+$ de la forme :

$$\begin{cases} \phi_s(t) = t^s\ \varphi_s(t) \text{ pour } o \leq s \leq m-k-1\ ; \\ \phi_{m-k-1+j}(t) = t^{-1-\rho_j}\ \varphi_{m-k-1+j}(t) \text{ pour } j=1,\dots,k\ ; \end{cases}$$

si $k < m$, et de la forme :

$$\phi_j(t) = t^{-1-\rho_j} \varphi_j(t) \quad \text{pour } j=1,\dots,m ,$$

si $k \geq m$, où les ρ_j sont les racines de l'équation $\psi(\rho) = o$ et où les φ_s sont des fonctions entières telles que $\varphi_s(o) = 1$. Il est alors facile de vérifier que la dimension du noyau de L est égale à $m - R_p$.

On montre maintenant que, si l'opérateur L vérifie la condition (I'), alors la codimension de $LW_k^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$ est égale à $r_p - R_p$.

Pour cela, il suffit d'évaluer la dimension de l'espace des g appartenant à Ker $L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R})$ à support ponctuel en $\{o\}$, c'est-à-dire, par transformation de Fourier, la dimension de l'espace des polynômes appartenant à Ker $\hat{L}^* \cap \hat{H}^{-p}(\mathbb{R})$.

L'opérateur L^*, adjoint formel de l'opérateur L, s'écrit :

$$L^*(t\ ;\ D_t)\ u(t) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,m)} P^{*m-h}\ (D_t)\ \{t^{k-h}\ u(t)\},$$

avec

$$P^{*m-h}(D_t) = \sum_{\ell=o}^{h} \sum_{j=h-\ell}^{m-\ell} \overline{p_j^{m-\ell}}\ \binom{j}{h-\ell}\ (k-\ell)\dots(k-h+1)\ (-i)^{\ell-h}\ D_t^{j-h+\ell},$$

pour $h=o,\dots,\mathrm{Min}(k,m)$.

Les racines ρ_j^* de l'équation déterminante $\phi^*(\rho) = o$ associée à L^* sont égales à :

$$\rho_j^* = -\bar{\rho}_j - m + k - 1$$

pour $j=1,\dots,k$.

On cherche à quelles conditions un polynôme $\hat{v}^*(\tau) = \sum_{\ell=o}^{n} c_\ell\ \tau^\ell$ est solution de $\hat{L}^*\ \hat{v}^* = 0$. Or :

$$\hat{L}^*(\tau\ ;\ D_\tau)\ \hat{v}^*(\tau) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,m)} \sum_{j=o}^{m-h} p_j^{*m-h}\ \tau^j \sum_{\ell=o}^{n} c_\ell\ (-D_\tau)^{k-h}\ \tau^\ell$$

$$= \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,m)} \sum_{j=o}^{m-h} p_j^{*m-h}\ i^{k-h} \sum_{\ell=k-h}^{n} c_\ell\ \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+h+1)\ \tau^{\ell-k+h+j} ,$$

donc, nécessairement, $\phi^*(n) = 0$ ($\phi^*(n)$ est en effet le coefficient du terme de plus haut degré), c'est-à-dire que n doit être une racine entière ρ^* de $\phi^*(\rho^*) = 0$.

Ainsi, si $k \leq m$ et si la condition (I') est satisfaite, il n'y a pas de solution polynôme, autre que 0, appartenant à Ker $\hat{L}^* \cap \hat{H}^{-p}(\mathbb{R})$.

Si $k > m$, les polynômes de degré $0,1,\ldots,k-m-1$ sont solutions de $\hat{L}^* \ \hat{v}^* = 0$ ($\hat{L}^*$ est un opérateur différentiel d'ordre k n'ayant pas les termes D_τ^j avec $j < k-m$) et, si la condition (I') est satisfaite, $\phi^*(\rho^*) = 0$ n'admet que $0,1,\ldots,k-m-1$ comme racines entières, ainsi les polynômes de Ker $\hat{L}^*$ forment un espace vectoriel de dimension $k-m$. D'autre part, un polynôme de degré ρ^* appartient à $\hat{H}^{-p}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\rho^* < p - \frac{1}{2}$, i.e. : si et seulement si $\rho^* = -\bar{\rho} - m + k - 1 < p - \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\rho > -m - p + k - \frac{1}{2}$. Il n'y a donc que les $r_p - R_p$ racines entières ρ_j de $\phi(\rho) = 0$ qui vérifient $\mathrm{Re}\,\rho > -m - p + k - \frac{1}{2}$ et qui induisent des solutions polynômes appartenant à Ker $\hat{L}^* \cap \hat{H}^{-p}(\mathbb{R})$.

Finalement, la codimension de $LW_k^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$ est égale à $r_p - R_p$ et par suite, l'indice de l'opérateur L, opérant de $W_k^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$ est égal à $(m - R_p) - (r - R_p) = m - r_p$.

<u>3ème étape</u> : Calcul de l'indice de l'opérateur L dans le cas général.

Si l'opérateur L ne vérifie pas la condition (I'), il est facile de vérifier qu'il existe des nombres complexes ε_{m-h}^{m-h}, pour $1 \leq h \leq \mathrm{Min}(k,m)$, aussi petits que l'on veut en module tels que :

(i) L'opérateur $L_\varepsilon(t\ ;\ D_t) \equiv L(t\ ;\ D_t) + \sum_{h=1}^{\mathrm{Min}(k,m)} \varepsilon_{m-h}^{m-h}\, D_t^{m-h}\, \{t^{k-h}\}$ vérifie la condition (I') ;

(ii) L'équation déterminante, associée à l'opérateur L_ε, $\phi_\varepsilon(\rho) = 0$ n'admet aucune racine sur la droite $\mathrm{Re}\,\rho = -p - m + k - \frac{1}{2}$;

(iii) Le nombre de racines de l'équation $\phi_\varepsilon(\rho) = o$ vérifiant $\mathrm{Re}\ \rho > -p-m+k-\frac{1}{2}$ est égal à r_p.

De plus, si $|\varepsilon_{m-h}^{m-h}|$, pour $1 \leq h \leq \mathrm{Min}(k,m)$, est assez petit, l'opérateur L_ε de $W_k^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$ est un opérateur à indice dont l'indice est égal à celui de L. Mais d'après la 2ème étape, l'indice de L , dans les espaces considérés, est égal à $m-r_p$. Par suite, l'indice de l'opérateur L de $W_k^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$ est égal à $m-r_p$. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.

3.2. Etude de l'opérateur L sur $(T, +\infty)$, $o < T < +\infty$:

On va établir la proposition suivante :

Proposition 3.2 : L'opérateur L, considéré comme opérateur de $W_k^{m+p}(T,+\infty)$ dans $H^p(T,+\infty)$, est un opérateur à indice, son indice est égal à m_+ .

Démonstration : Selon la méthode indiquée dans le paragraphe 3.1 (1ère étape), il est facile de voir que l'opérateur L est linéaire continu surjectif de $W_k^{m+p}(T,+\infty)$ sur $H^p(T,+\infty)$.

Pour montrer que la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(T,+\infty)$ est égale à m_+, on va établir un résultat général sur les équations différentielles à coefficients "presque constants".

Soit $A = A(D_t) = \sum_{p=o}^{m} a_p\ D_t^p$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients constants tel que le polynôme $A(\tau) = \sum_{p=o}^{m} a_p\ \tau^p$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On note m_+ le nombre de zéros à partie imaginaire positive de $A(\tau)$.

Soit $B = B(t;D_t) = \sum_{p=o}^{m-1} b_p(t)\ D_t^p$ un opérateur différentiel d'ordre m-1 au plus, à coefficients appartenant à $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et dont toutes les dérivées sont bornées sur $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Proposition 3.3 : Il existe $\varepsilon > o$ telle que : si pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$, et $o \leq p \leq m-1$, on a : $|b_p(t)| \leq \varepsilon$, alors :

(i) la dimension du noyau de A+B dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ est égale à m_+ ;

(ii) il existe une constante $c > o$ et, pour tout entier $\ell \geq o$, il existe une constante $c_\ell > o$ telles que, si u appartient à $Ker_+(A+B) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$, alors :

$$|D_t^\ell \, u(t)| \leq c_\ell \, . \, e^{-ct}$$

pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$.

Cette proposition est en fait un cas particulier du théorème 3.2 de [7], Néanmoins, dans ce cas, on peut en donner une démonstration simple.

Démonstration :

(i) L'opérateur $\{A \; ; \gamma_o, \ldots, \gamma_{m_+-1}\}$ étant un isomorphisme de $H^m(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m_+}$, l'opérateur $\{A+B \; ; \gamma_o, \ldots, \gamma_{m_+-1}\}$ est aussi un isomorphisme de $H^m(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m_+}$ pourvu que ε soit assez petit. Par suite, $Ker_+(A+B) \cap H^m(\mathbb{R}_+)$ est de dimension m_+.

Les coefficients de $B(t \, ; D_t)$ étant de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $Ker_+(A+B) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ est contenu dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Tout élément u de $Ker_+(A+B) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ peut être considéré comme une solution du problème :

$$\begin{cases} Au = f, \\ u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+), \\ f(=-Bu) \in H^{-m+1}(\mathbb{R}_+). \end{cases}$$

Il en résulte, par prolongement à $\mathbb{R}$ et transformation de Fourier, que u appartient à $H^\infty(\mathbb{R}_+)$ $(= \bigcap_s H^s(\mathbb{R}_+))$. Donc, $Ker_+(A+B) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ coïncide avec $Ker_+(A+B) \cap H^m(\mathbb{R}_+)$ et sa dimension est égale à m_+ .

(ii) On fait le changement de fonction : $u(t) = e^{-ct} \, v(t)$, où c est une constante positive. La formule de Leibnitz donne :

$$D_t^p\, u(t) = e^{-ct}\, D_t^p\, v(t) + \sum_{q=0}^{p-1} \binom{p}{q} (ic)^{p-q}\, e^{-ct}\, D_t^q\, v(t),$$

donc,

$$\{A(D_t) + B(t\,;D_t)\}\,\{u(t)\} = e^{-ct}\,\{A(D_t) + c(t\,;D_t)\}\,\{v(t)\},$$

où

$$c(t\,;D_t) = B(t\,;D_t) + \sum_{p=1}^{m-1} (a_p + b_p(t)) \sum_{q=0}^{p-1} \binom{p}{q} (ic)^{p-q}\, D_t^q +$$

$$+ a_m \sum_{q=0}^{m-1} \binom{m-1}{q} (ic)^{m-1-q}\, D_t^q\ ;$$

l'opérateur $c(t\,;D_t)$ est du même type que l'opérateur $B(t\,;D_t)$ et vérifie des propriétés analogues dès que c est assez petit. Il suffit maintenant d'appliquer les résultats de (i) à l'opérateur $A(D_t) + c(t\,;D_t)$.

Remarque 3.3 : Par une méthode analogue, on peut montrer que toute fonction u appartenant à $\mathrm{Ker}_+(A+B) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+)$ et n'appartenant pas à $L^2(\mathbb{R}_+)$ est à croissance rapide.

On peut maintenant démontrer que la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(T,+\infty)$ est égale à m_+. Remarquons déjà qu'il suffit de le montrer pour T grand.

On écrit l'opérateur $L(t\,;D_t)$ sous la forme :

$$L(t\,;D_t) = t^k(A(D_t) + B(t\,;D_t)),$$

avec

$$A(D_t) = P^m(D_t)$$

et

$$B(t\,;D_t) = \frac{1}{t^k}\, L(t\,;D_t) - P^m(D_t).$$

Chacun des coefficients de l'opérateur $B(t\,;D_t)$ est un polynôme en $\frac{1}{t}$ sans terme constant. Il existe donc $T > 0$, assez grand, tel que sur l'intervalle $(T,+\infty)$, on puisse appliquer la proposition 3.3. On en déduit facilement que la dimension du noyau de L dans $W_k^{m+p}(T,+\infty)$ est exactement m_+. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.2.

3.3. Démonstration du théorème 3.1.

On considère l'application :

$$(u_1,u_2) \longmapsto (Lu_1, Lu_2) : W_k^{m+p}(0,T) \times W_k^{m+p}(T,+\infty) \longrightarrow H^p(0,T) \times H^p(T,+\infty).$$

Il résulte des propositions 3.1 et 3.2 que cette application est à indice, d'indice $m_+ + (m-r_p)$.

Par ailleurs, l'espace $W_k^{m+p}(o,+\infty)$ peut être considéré comme un sous-espace fermé de codimension m+p dans $W_k^{m+p}(0,T) \times W_k^{m+p}(T,+\infty)$. De même, l'espace $H^p(o,+\infty)$ peut être considéré comme un sous-espace fermé de codimension p dans $H^p(o,T) \times H^p(T,+\infty)$.

Par suite, l'opérateur L, considéré comme opérateur de $W_k^{m+p}(o,+\infty)$ dans $H^p(o,+\infty)$, est un opérateur à indice dont l'indice est égal à :

$(m-r_p) + m_+ -(m+p) + p = m_+ - r_p$, ce qu'il fallait démontrer.

Du théorème 3.1, on déduit que l'image $LW_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ est égale à :

$$LW_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) = \{f \in H^p(\mathbb{R}_+) \; ; \forall g \in \operatorname{Ker} L^* \cap H_o^{-p}(\mathbb{R}_+), \; < f,\bar{g} >_{H^p(\mathbb{R}_+)\times H_o^{-p}(\mathbb{R}_+)} = 0\}.$$

Désignons par ℓ_p la dimension de l'espace $\operatorname{Ker} L^* \cap H_o^{-p}(\mathbb{R}_+)$. La dimension du noyau dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ est donc égale à $m_+ - r_p - \ell_p$.

Concernant cet entier ℓ_p , on donne les remarques suivantes :

Remarque 3.4.: Si q est un entier $\geq o$ tel que l'équation $\phi(\rho) = o$ n'ait pas de zéro dans la bande :

$$-(p+q) - m + k - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \rho \leq - p - m + k - \frac{1}{2} ,$$

alors on a vu (cf. corollaire 2.1) que :

$$\operatorname{Ker} L^* \cap H^{-(p+q)}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} L^* \cap H^{-p}(\mathbb{R}).$$

Il en résulte que :

$$\operatorname{Ker} L^* \cap H_o^{-(p+q)}(\mathbb{R}_+) = \operatorname{Ker} L^* \cap H_o^{-p}(\mathbb{R}_+),$$

et donc $\ell_{p+q} = \ell_p$.

Remarque 3.5 : De manière générale, l'entier ℓ_p peut être atteint par des conditions algébriques portant sur l'opérateur L à partir de la proposition suivante :

Proposition 3.4 : Soit u appartenant à Ker L $\cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La distribution u est à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_-$).

(ii) La transformée de Fourier $\hat{u}$ de u se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de Im $\tau \leq o$ (resp. Im $\tau \geq o$).

(On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$).

Démonstration :

(i) Si u est une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, sa transformée de Fourier $\hat{u}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-espace Im $\tau < o$. Or, de plus, ici, $\hat{u}$ appartient à Ker $\hat{L}$, donc $\hat{u}$ est holomorphe dans un voisinage de l'axe réel dans $\mathbb{C}$.

(ii) La fonction $\hat{u}$ appartient à Ker $\hat{L}$ et peut donc être majorée en module par un polynôme dans un voisinage de l'infini. Par suite, si $\hat{u}$ est supposée holomorphe dans Im $\tau < o$, on en déduit que u est une distribution à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (cf. [6]).

On donne maintenant les résultats de régularité associés aux opérateurs L :

Corollaire 3.1 : Soient p et q deux entiers $\geq o$ tels que l'équation $\phi(\rho) = 0$ n'ait pas de zéro dans la bande :

$$-(p+q) - m + k - \frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ \rho \leq - p - m + k - \frac{1}{2} .$$

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ et si Lu appartient à $H^{p+q}(\mathbb{R}_+)$, alors u appartient à $W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}_+)$. En particulier, on a :

$$\mathrm{Ker}_+ \, L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) = \mathrm{Ker}_+ \, L \cap W_k^{m+p+q}(\mathbb{R}_+).$$

On en déduit :

Corollaire 3.2 : Soit p un entier $\geq$ o tel que l'équation $\phi(\rho) = 0$ n'ait pas de zéro dans le demi-espace : $\mathrm{Re}\, \rho \leq -p - m + k - \frac{1}{2}$.

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ et si Lu appartient à $H^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ $(= \bigcap_s H^s(\mathbb{R}_+))$, alors u appartient à $W_k^{\infty}(\mathbb{R}_+) = \{u \in H^{\infty}(\mathbb{R}_+) \; ; \; t^k u \in H^{\infty}(\mathbb{R}_+)\}$.
En particulier, on a :

$$\mathrm{Ker}_+ \, L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) = \mathrm{Ker}_+ \, L \cap W_k^{\infty}(\mathbb{R}_+).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". A paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

[2] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une ou plusieurs variables". Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-1971. Ecole Polytechnique. Séance du 24 mars 1971.

[3] E.A. CODDINGTON and N. LEVINSON : "Theory of ordinary differential equations." Mc. Graw-Hill, New-York (1955).

[4] J.L. LIONS et E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes". Dunod - Tome 1 - PARIS 1968.

[5] HARDY - LITTLEWOOD - POLYA : "Inequalities". Cambridge University. Press. 1967.

[6] L. SCHWARTZ : "Théorie des distributions". Hermann - Paris 1966.

[7] M.I. VISIK and V.V. GRUSIN : "On a class of higher order degenerate elliptic equations". Math. U.S.S.R. Sbornik - Vol. 8 (1969), n° 1.

[8] M.I. VISIK and V.V. GRUSIN : "Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain". Math. U.S.S.R. Sbornik - Vol. 9 - (1969) - n° 4.