

R. PAVEC

Équation d'évolution sur $[O, T]$, avec condition en plusieurs points

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 3, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__1_A3_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EQUATION D'EVOLUTION SUR $[0, T]$,
 AVEC CONDITION EN PLUSIEURS POINTS.

par

R. PAVEC

On résoud le problème :

$$(I) \quad \begin{cases} u \in L^2(0, T, V), u' \in L^2(0, T, V') \\ u'(t) + \alpha(t) Au(t) = f(t), \text{ p.p. } t \in [0, T]. \\ \sum_0^n \alpha_k u(t_k) = \xi. \end{cases}$$

INTRODUCTION.

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur \mathbb{C} tels que $V \hookrightarrow H, V$ dense dans H . En identifiant H à son anti-dual, on a $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$. Soit A l'opérateur associé à une forme hermitienne continue, coercive sur V et

$$c = \inf_{\|u\|_V=1} \langle Au, u \rangle_{V' \times V}$$

$$D(A) = \{u \in V \mid Au \in H\} \quad \|u\|_{D(A)}^2 = \|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2$$

Il existe une mesure de Radon $\mu \geq 0$ sur $[c, +\infty[$ et un champ μ -mesurable d'espaces de Hilbert (H_λ) , un opérateur unitaire U de H sur

$$\mathcal{H} = \int H_\lambda d\mu(\lambda)$$

qui transforme

$$D(A^0) \text{ en } \mathcal{H}_0 = \{v \mid \lambda^0 v \in \mathcal{H}_0; \|v\|_{\mathcal{H}_0}^2 = \|\lambda^0 v\|_{\mathcal{H}}^2\}$$

et tel que pour tout $u \in V$:

$$U(Au)(\lambda) = \lambda Uu(\lambda)$$

En posant pour p.p. $t \in [0, T]$ et $u \in L^2(0, T, V)$

$$(U(u))(t) = U(u(t))$$

on en déduit un isomorphisme entre

$$L^2(0, T, D(A^\theta)) \text{ et } L^2(0, T, \mathcal{H}_\theta)$$

Soit

$$w_\theta = \{u \in L^2(0, T, D(A^{\theta+1/2})) \mid u' \in L^2(0, T, D(A^{\theta-1/2}))\}$$

$$\|u\|_{w_\theta}^2 = \|u\|_{L^2(0, T, D(A^{\theta+1/2}))}^2 + \|u'\|_{L^2(0, T, D(A^{\theta-1/2}))}^2$$

\mathcal{U} transforme w_θ en :

$$\{v \in L^2(0, T, \mathcal{H}_{\theta+1/2}) \mid v' \in L^2(0, T, \mathcal{H}_{\theta-1/2})\},$$

muni de sa norme canonique.

Soit α une fonction continue par morceaux sur $[0, T]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . En posant :

$$(\mathcal{U}u)(t) = u(\lambda, t)$$

le problème (I) devient équivalent à :

$$(II) \quad \begin{cases} u(\lambda, t) \in L^2(0, T, \mathcal{H}_{1/2}), u' \in L^2(0, T, \mathcal{H}_{-1/2}) \\ u'(\lambda, t) + \lambda \alpha(t) u(\lambda, t) = f(\lambda, t), \text{ p.p. } \lambda \geq c, \text{ p.p. } t \in [0, T] \\ \sum_0^n \alpha_k u(\lambda, t_k) = \xi(\lambda). \end{cases}$$

Dans la première partie, on traite l'équation homogène ($f=0$) et on obtient des résultats pour une fonction α pouvant changer de signe. Dans la deuxième partie, on suppose $f \neq 0$ et la fonction α positive sur $[0, T]$, sauf en un nombre fini de points de $[0, T]$, où elle peut être nulle.

I. CAS DE L'EQUATION HOMOGENE.

Soit $a(t) = \int_0^t \alpha(\sigma) d\sigma$, $m = \inf_{t \in [0, T]} a(t)$, $a_0(t) = a(t) - m$

On suppose que :

(1)
$$\begin{cases} a_0(t) \text{ s'annule en un nombre fini de points :} \\ 0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q \leq T ; q \geq 0. \end{cases}$$

En chaque point τ_i , on suppose :

(2)
$$\begin{cases} \alpha(t) \sim \mu_i^- |t - \tau_i|^{p_i^-} \text{ quand } t \rightarrow \tau_i^-, \text{ avec } \mu_i^- < 0, p_i^- \geq 0. \\ \alpha(t) \sim \mu_i^+ |t - \tau_i|^{p_i^+} \text{ quand } t \rightarrow \tau_i^+, \text{ avec } \mu_i^+ > 0, p_i^+ \geq 0. \end{cases}$$

(avec modification évidente si $\tau_0 = 0, \tau_q = T$)

(3) Soit $p = \max_{i=0, \dots, q} (p_i^-, p_i^+) + 1$.

(4) Soit $t_i = \tau_i, i=0, \dots, q$ et $t_{q+1}, \dots, t_n \in [0, T]$; ($n \geq q$).

Pour $\lambda \geq c$, on pose $A(\lambda) = \sum_0^n \alpha_k c^{-\lambda a_0(t_k)} = \beta_0 + \sum_{q+1}^n \alpha_k c^{-\lambda a_0(t_k)}$

avec $\alpha_k \in \mathbb{R}, (k=0, \dots, n)$. On suppose :

(5)
$$\begin{cases} \beta_0 \neq 0 \\ \text{Pour tout } \lambda \geq c : A(\lambda) \neq 0 \end{cases}$$

Soit $X_\theta = \{u \in W_\theta \mid u' + \alpha Au = 0\}$; muni de la norme induite par $L^2(0, T, D(A^{\theta+1/2}))$, X_θ est un espace de Hilbert.

Soit $\theta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$

Théorème 1: Avec les hypothèses (1) à (5), pour tout $\xi \in D(A^{\theta_0})$, il existe

$u \in W_\theta$ unique satisfaisant à :

$$\begin{cases} u' + \alpha Au = 0 \\ \sum_0^n \alpha_k u(t_k) = \xi \end{cases}$$

et l'application $\xi \longrightarrow u$ est un isomorphisme de $D(A^{\theta_0})$ sur X_{θ_0} . Pour tout $\theta \geq \theta_0$ cette application est aussi un isomorphisme entre $D(A^{\theta})$ et $X_{\theta-\theta_0}$.

De (5), il résulte que $\beta = \inf_{\lambda \geq c} |A(\lambda)| > 0$ et (2) l'existence d'une fonction β telle que,

$$(6) \quad \begin{cases} \forall t \in [0, T] & 0 \leq \beta(t) \leq \alpha(t) \\ \beta(t) = \mu |t - \tau_i|^p & \text{si } t \in \left[\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2}, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2} \right] \end{cases}$$

avec $\tau_{-1} = -\tau_0$, $\tau_{q+1} = 2T - \tau_q$; $i = 0, \dots, q$.

La formulation (II) du problème montre que si $u' + \alpha Au = 0$:

$$u(\lambda, t) = c(\lambda) e^{-\lambda a_0(t)}$$

En écrivant $\sum_0^n \alpha_k u(t_k) = \xi$ on en déduit $C(\lambda) = \frac{\xi(\lambda)}{A(\lambda)}$ et (6) montre que $\mathcal{U}^{-1} u(\lambda, t) \in W_0$.

Réciproquement, si $u \in X_0$ on déduit de (2) que $C(\lambda) \in \mathcal{K}_{\theta_0}$, et donc $\sum_0^n \alpha_k u(t_k) \in D(A^{\theta_0})$.

II. EQUATION NON HOMOGENE, AVEC UNE FONCTION α S'ANNULANT EN UN POINT

$$\underline{\tau_0 \in]0, T]}.$$

On suppose :

$$(7) \quad \begin{cases} \forall t \neq \tau_0 : \alpha(t) > 0. \\ \alpha(t) \sim \mu |t - \tau_0|^{p-1} \text{ quand } t \rightarrow \tau_0. \end{cases}$$

Soit $a_0(t) = \int_0^t \alpha(\sigma) d\sigma$ et $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$.

$A(\lambda)$ est défini comme au § 2 avec $\beta_0 = \alpha_0$. Soit $\theta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$.

Théorème 2 : Si les hypothèses (7) et (5) sont vérifiées, pour tout

$(f, \xi) \in L^2(0, T, D(A^{\theta_1})) \times H$, il existe u unique satisfaisant à (I) et l'application $(f, \xi) \longrightarrow u$ est continue de $L^2(0, T, D(A^{\theta_1})) \times H$ dans W_0 .

De plus, si $(f, \xi) \in L^2(0, T, D(A^{\theta})) \times D(A^{\theta-\theta_1})$ on a $u \in W_{\theta-\theta_1}$, pour tout $\theta \geq \theta_1$.

De (7), il résulte qu'il existe $\mu > 0$ tel que pour u et t tel que $0 \leq u \leq t \leq T$:

$$(8) \quad 0 \leq \mu(t-u)^p \leq a_0(t) - a_0(u).$$

On utilise alors la formulation de (II) du problème (I). L'unicité est immédiate (théorème 1). L'existence se démontre en deux étapes. On résoud d'abord :

$$\begin{cases} v \in W_0 \\ v'(t) + \alpha(t) A v(t) = f(t) \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

On a :

$$Uv(t) = v(\lambda, t) = \int_0^t e^{-\lambda(a_0(t) - a_0(u))} f(\lambda, u) du.$$

De (8), on déduit :

$$\int_0^T \|v(\lambda, t)\|_{H_\lambda}^2 dt \leq C \lambda^{-2/p} \|f(\lambda, \cdot)\|_{L^2(0, T, H_\lambda)}^2$$

Il en résulte

$$\int_0^\infty \int_0^T \lambda \|v(\lambda, t)\|_{H_\lambda}^2 d\mu(\lambda) dt \leq C \|f\|_{L^2(0, T, D(A^{-1}))}^2$$

On en déduit $v \in W_0$. On résoud alors :

$$\begin{cases} v_0 \in W \\ v_0'(t) + \alpha(t) A v_0(t) = 0 \\ \sum_0^n \alpha_k v_0(t_k) = \xi - \sum_0^n \alpha_k v(t_k). \end{cases}$$

et ce système admet une solution $v_0 \in W_0$ d'après le théorème 1. En posant $u = v + v_0$, on en déduit une solution de I.

Remarque : Le théorème 2 est encore vrai en supposant $\alpha(t) > 0$ sauf en des points $0 < T_0 < T_1 < \dots < T_q$, et telle que :

$$\alpha(t) \sim \mu_i |t - T_i|^{p_i} \text{ quand } t \rightarrow T_i \quad (\mu_i > 0, p_i > 0)$$

avec $p = \max_{i=0, \dots, q} (p_i) + 1$.

Théorème 2'. Soit $m \in \mathbb{N}$ et α une fonction de classe C^m .

Si $(f, \xi) \in [L^2(0, T, D(A^{\theta_1+m})) \cap H^m(0, T, V')] \times D(A^m)$, la solution u de (I) appartient à $L^2(0, T, D(A^{m+1/2})) \cap H^{m+1}(0, T; V')$, et l'application $(f, \xi) \rightarrow u$ est continue dans ces espaces.

$$H^m(0, T, V') = \{v \in L^2(0, T, V') \mid v^{(j)} \in L^2(0, T, V'), j=1, \dots, m\}.$$

$\theta_1 + m \geq m - \frac{1}{2}$. Donc, $f \in L^2(0, T, D(A^{m-1/2}))$ et d'après le théorème des dérivées intermédiaires $f^{(j)} \in L^2(0, T, D(A^{m-1/2, j}))$ pour $j=0, 1, \dots, m$.

D'après le théorème 2), la solution u de (I) vérifie

$$\begin{cases} u \in L^2(0, T, D(A^{m+1/2})) \\ u' \in L^2(0, T, D(A^{m-1/2})) \end{cases}$$

Supposons que $u^{(j)} \in L^2(0, T, D(A^{m+1/2-j}))$. De (I), on déduit

$$u^{(j+1)}(t) = f^{(j)}(t) - (\alpha(t) Au)^{(j)}$$

si $k \leq j-1$ $u^{(k)} \in L^2(0, T, D(A^{m-1/2-j-1}))$ et donc $Au^{(k)} \in L^2(0, T, D(A^{m-1/2-j}))$

D'où :

$$(\alpha(t) Au)^{(j)} = \alpha(t) A u^{(j)} + \text{élément de } L^2(0, T, D(A^{m-1/2-j}))$$

or $\alpha(t) A u^{(j)}(t) \in L^2(0, T, D(A^{m+1/2-j-1}))$

$$f^{(j)}(t) \in L^2(0, T, D(A^{m+1/2-j-1})) \text{ si } j \leq m.$$

ce qui entraîne $u^{(j+1)} \in L^2(0, T, D(A^{m+1/2-(j+1)}))$.

On en déduit $u^{(m+1)} \in L^2(0, T, V')$. La continuité résulte aussi de cette démonstration.

Remarque : Si $\rho = 0$, $\theta_1 = -\frac{1}{2}$ ($\alpha(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$). Les applications considérées dans le théorème 2 et le théorème 2' sont des isomorphismes.

Exemple :

$$V = H_0^1(0,1) \quad H = L^2(0,1)$$

$$a(u,v) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx ; u, v \in V$$

$$A = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1).$$

$$T = 2 ; \alpha(t) = |1-t|, \quad t \in [0,2].$$

$$\text{On a } p = 2. \quad \theta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

D'après le théorème 2, pour tout $f \in L^2([0,2[\times]0,1[)$, $\xi \in L^2(0,1)$,

il existe u unique satisfaisant à :

$$\begin{cases} u \in L^2(0,2, H_0^1(0,1)), u' \in L^2(0,2, H^{-1}(0,1)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - |1-t| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \text{ pp } (t,x) \in [0,2] \times [0,1]. \\ \sum_0^n \alpha_n u(t_k, x) = \xi(x), \text{ pp } x \in [0,1]. \end{cases}$$

où les coefficients α_k , satisfont à (5).