JEAN-FRANÇOIS NOURRIGAT

Théorème de traces

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 4, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___1_A4_0>

THEOREME DE TRACES

par

Jean-François NOURRIGAT

INTRODUCTION.

On considère un opérateur différentiel P à coefficients indéfiniment dérivables sur $\overline{\mathbb{R}^+}$, des constantes réelles α_o , α_1 , p_o , p_1 vérifiant des inégalités convenables, et on cherche tout d'abord à quelle condition on a l'implication :

$$(a) \qquad \begin{cases} t^{\alpha_o} u(t) \in L^{p_o}(o,1) \\ t^{\alpha_1} Pu(t) \in L^{p_1}(o,1) \end{cases} \Longrightarrow u \in \mathscr{C}^k([o,1]),$$

k étant un entier strictement inférieur à l'ordre de l'opérateur. On se borne à traiter le cas où P est du type de Fuchs en t=o (cf. définition 1).

On démontre (théorème 1) que si l'implication :

$$(b) \qquad \begin{cases} t^{\alpha_o} u(t) \in L^{p_o}(o,1) \\ Pu(t) = o \end{cases} \Longrightarrow u \in \mathscr{C}^k([o,1]),$$

est vraie, alors (a) est aussi vraie. Pour chercher si un opérateur du type de Fuchs vérifie (a), il suffit de considérer le noyau de cet opérateur.

D'autre part, on considère un couple compatible (A_o,A_1) d'espaces de Banach et on désigne par W l'espace des distributions vectorielles u telles que

$$\begin{cases} t^{\alpha_o} u(t) \in L^{p_o}(o,\infty,A_o) \\ t^{\alpha_1} Pu(t) \in L^{p_1}(o,\infty,A_1). \end{cases}$$

D'après la première partie :

$$u \in W \Longrightarrow u \in \mathscr{C}^k([o,1], A_o + A_1).$$

On se propose d'étudier l'espace décrit par $u^{(j)}(o)$ $(j \leq k)$ quand u parcourt W. Dans le cas où $A_o \hookrightarrow A_1$, on peut caractériser cet espace avec les seules hypothèses précédentes : c'est un espace d'interpolation usuel, introduit dans LIONS-PEETRE [1], le même espace que si P était remplacé par son terme de plus haut degré.

Dans le cas d'un couple compatible (A_o , A_1) quelconque, on peut aboutir au même résultat moyennant les hypothèses sur le comportement de l'opérateur P sur l'intervalle $(1,\infty)$.

I. NOTATIONS. EXISTENCE DES TRACES.

Définition 1 : On appellera opérateur différentiel du type de Fuchs, un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^+$, de la forme :

$$Pu(t) = \sum_{j=o}^{m} a_j(t) \frac{d^j u}{dt^j}$$

tel que $a_j \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$ et de plus :

1) $a_m(t) \neq o$ pour $t > o$ et $\lim\limits_{t\to o} \dfrac{a_m(t)}{t^m} = 1$

2) Pour $j \leq m-1$, la fonction a_j admet à l'origine un zéro d'ordre au moins égal à j.

On ne particularise rien à supposer que $a_m(t) = t^m$.

Définition 2 : Pour tout opérateur du tupe de Fuchs P, on appelle équation déterminante de P l'équation algébrique :

$$F(\lambda) = \sum_{j=o}^{m} \left[\lim_{t\to o} \frac{a_j(t)}{t^j}\right] \lambda(\lambda-1) \ldots (\lambda-j+1) = o.$$

Définition 3 : Etant donné un couple compatible (A_o,A_1) d'espaces de Banach des nombres réels α_o , α_1 , p_o , p_1 tels que

$$1 \leq p_o , p_1 \leq \infty$$

et un opérateur P du type de Fuchs d'ordre m, on désignera par $W^P(\alpha_o , p_o , A_o ; -\alpha_1 , p_1 , A_1)$ l'espace des distributions vectorielles u sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $A_o + A_1$ telles que :

$$\begin{cases} t^{\alpha_o}\, u(t) \in L^{p_o}(o,\infty,A_o) \\ t^{\alpha_1 - m}\, Pu(t) \in L^{p_1}(o,\infty,A_1). \end{cases}$$

(m désigne l'ordre de l'opérateur P). Cet espace est muni de sa norme naturelle d'espace de Banach.

On désigne par E l'espace des distributions sur $]o,1[$ telles que

$$\begin{cases} t^{\alpha_o}\, u(t) \in L^{p_o}(o,1) \\ Pu(t) = o\ . \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

<u>Théorème 1</u> : Soient (A_o,A_1) un couple compatible d'espaces de Banach, m un entier ≥ 1, P un opérateur du type de Fuchs d'ordre m. On considère quatre nombres réels α_o , α_1 , p_o , p_1 et un entier k vérifiant

$$(1) \qquad \begin{cases} o \leq k \leq m-1 & 1 \leq p_o\ ,\ p_1 \leq \infty \\ \alpha_o + \dfrac{1}{p_o} + k > o & \alpha_1 + \dfrac{1}{p_1} + k < m \end{cases}$$

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $W^P(\alpha_o, p_o, A_o\ ;\ \alpha_1, p_1, A_1) \subset \mathscr{C}^k([o,1],\ A_o + A_1)$

b) $E \subset \mathscr{C}^k([o,1])$.

L'implication a) $\Longrightarrow$ b) est bien entendu triviale.

Nous allons démontrer que la condition b) implique une condition algébrique sur l'équation déterminante de P, à savoir :

$$\text{c)} \qquad \begin{cases} \text{L'équation déterminante de P n'admet pas de racine } \lambda \text{ telle que} \\ -\alpha_o - \dfrac{1}{p_o} < \mathrm{Re}\ \lambda \leq k, \text{ sauf éventuellement } \lambda = o,1,\dots,k \text{ qui doivent} \\ \text{alors être racines simples.} \end{cases}$$

D'après le théorème de Funchs, pour les opérateurs à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ pour toute racine λ_o de l'équation déterminante, il existe une fonction u(t) telle que :

$$\lim_{t\to o} \frac{u(t)}{t^{\lambda_o}} = 1 \quad \text{et} \quad Pu(t) = o \quad \text{sur }]o,1[.$$

S'il existe une racine λ_o dont la partie réelle est dans l'intervalle $]-\alpha_o - \frac{1}{p_o}, k]$, on vérifie que la fonction $u(t)$ correspondante est dans E (puisque $\alpha_o + \frac{1}{p_o} + \mathrm{Re}\,\lambda_o > o$) et ne peut être de classe $\mathcal{C}^k([o,1])$ si λ_o n'est pas égal à $0,1,\ldots$ ou k.

De même, si $\lambda = j$ est racine multiple de l'équation déterminante, j étant un entier tel que $-\alpha_o - \frac{1}{p_o} < j \leq k$, le théorème de Fuchs nous assure l'existence d'une fonction $v(t)$ telle que

$$\lim_{t \to o} \left(\frac{v(t)}{t^j} - \mathrm{Log}\, t\right) = o \quad \text{et} \quad Pv(t) = o \quad \text{sur }]o,1[$$

donc $v \in E$ et $v \notin \mathcal{C}^k([o,1])$, ce qui démontre b) $\Longrightarrow$ c).

Remarquons que l'implication c) $\Longrightarrow$ b) est fausse, sauf si $k=o$. On peut donner, grâce au théorème de Fuchs $\mathcal{C}^\infty$, une condition algébrique et suffisante pour que l'implication

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} t^{\alpha_o} u(t) \in L^{p_o}(o,1) \\ Pu(t) = o \end{cases} \Longrightarrow u \in \mathcal{C}^k([o,1])$$

soit vraie.

Il nous reste à démontrer que b) + c) $\Longrightarrow$ a).

Remarquons que d'après l'inégalité de Hölder et les inégalités (1) :

$$u \in W \Longrightarrow t^{-k-1}\, Pu(t) \in L^1(o,1,A_o + A_1)$$

Nous allons démontrer que pour tout f tel que

$$\text{(2)} \qquad t^{-k-1} f(t) \in L^1(o,1,A_o + A_1)$$

il existe une fonction $v \in \mathcal{C}^k([o,1], A_o + A_1)$, telle que

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} v(o) = v'(o) = \ldots = v^{(k)}(o) \\ Pv = f, \end{cases}$$

de sorte que $t^{\alpha_o} v(t) \in L^{p_o}(o,1,A_o + A_1)$. Donc, pour tout $u \in W$, la fonction v étant construite en prenant $f = Pu$, on a :

$$\begin{cases} t^{\alpha_o}(v(t) - u(t)) \in L^{p_o}(o,1,A_o + A_1) \\ P(v(t) - u(t)) = 0 \end{cases}$$

ce qui, d'après l'hypothèse a), implique v-u $\in \mathscr{C}^k([o,1],A_o + A_1)$, donc $u \in \mathscr{C}^k([o,1], A_o + A_1)$.

Le théorème 1 sera donc complètement démontré.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer l'existence d'un v vérifiant (3) pour tout f vérifiant (2). Il est clair qu'il suffit de démontrer ce résultat de surjectivité sur un intervalle $]o,\varepsilon[$, $\varepsilon > o$ convenable.

Démontrons-le tout d'abord pour k=o. Considérons, pour tout $\varepsilon > o$, les espaces :

$$X(\varepsilon) = \{u \quad '(o,\varepsilon ; A_o + A_1) \; ; \; u' \quad L^1(o,\varepsilon,A_o+A_1) \ldots \; t^{m-1} \; u^{(m)} \quad L^1(o,\varepsilon,A_o+A_1)\}$$

et
et

$$Y(\varepsilon) = \{f \in \mathscr{D}'(o,\varepsilon,A_o + A_1) \; ; \frac{f(t)}{t} \in L^1(o,\varepsilon,A_o + A_1)\},$$

munis de leurs normes naturelles d'espace de Banach. Nous allons démontrer que pour $\varepsilon > o$ assez petit, l'application $P : X(\varepsilon) \longrightarrow Y(\varepsilon)$ est surjective.

Posons :

$$P_o \, u(t) = \sum_{j=o}^{m} \left[\lim_{t\to o} \frac{a_j(t)}{t^j}\right] t^j \, \frac{d^j u}{dt^j}$$

Il est clair que les opérateurs P et P_o envoient $X(\varepsilon)$ dans $Y(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > o$, et que :

$$\lim_{\varepsilon\to o} \|P-P_o\|_{\mathscr{L}(X(\varepsilon),\, Y(\varepsilon))} = 0,$$

(car les coefficients $a_j(t)$ vérifient une majoration de la forme :

$$\left| a_j(t) - \left(\lim_{t\to o} \left[\frac{a_j(t)}{t^j}\right]\right) t^j \right| \leq c \; t^{j+1} \;).$$

Nous allons construire une application E de $Y(\varepsilon)$ dans $X(\varepsilon)$ dont la norme sera majorée indépendamment de ε, et telle que :

$P_o\, E\, f = f$ pour tout $f \in Y(\varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > o$ tel que

$$\| E \circ (P-P_o) \|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} < 1.$$

Alors, pour tout $f \in Y(\varepsilon)$, il existera $v \in X(\varepsilon)$ tel que

$$v + E \circ (P-P_o)\, v = Ef$$

donc $Pv = f$ ce qui démontrera le résultat de surjectivité annoncé.

Il ne nous reste plus qu'à construire l'application E.

Nous effectuons le changement de variable $t = e^x$, en adoptant les notations $\tilde{u}(x) = u(e^x)$, $\tilde{f}(x) = f(e^x)$, etc... Remarquons que

$$u \in X(\varepsilon) \Longleftrightarrow \{ D_x^j\, \tilde{u} \in L^1(-\infty, \log \varepsilon, A_o + A_1),\ 1 \leq j \leq m \}$$

et

$$f \in Y(\varepsilon) \Longleftrightarrow \tilde{f} \in L^1(-\infty, \log \varepsilon, A_o + A_1)$$

D'autre part, si on fait le changement de variable $t = e^x$, l'opérateur P_o se transforme en un opérateur à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est l'équation déterminante de P, que nous noterons

$$(\lambda - \lambda_1)\ (\lambda - \lambda_2)\ \ldots\ (\lambda - \lambda_m) = 0.$$

D'après la condition c), on a $\mathrm{Re}\, \lambda_j \neq 0$, sauf éventuellement $\lambda_1 = 0$.

Posons alors :

$$E_j(x) = \begin{cases} Y(x)\, e^{\lambda_j x} & \text{si } \mathrm{Re}\, \lambda_j \leq o \\ -Y(-x)\, e^{\lambda_j x} & \text{si } \mathrm{Re}\, \lambda_j > o. \end{cases}$$

Il est clair que l'application E définie par

$$\widetilde{Ef} = E_1 * E_2 * \ldots * E_m * \tilde{f}$$

(on sous-entend le prolongement de $\tilde{f}(x)$ par 0 pour $x > \log \varepsilon$), envoie $Y(\varepsilon)$ dans $X(\varepsilon)$, que sa norme est majorée indépendamment de ε, et que

$$P_o\, Ef = f$$

pour tout $f \in Y(\varepsilon)$.

Si $k \neq o$, on se ramène à la situation précédente en posant :

$$Q\, w(t) = t^{-k}\, P(t^k\, u(t))$$

et
$$w(t) = \frac{v(t)}{t^k}$$

Il est clair que pour trouver v vérifiant (3), il suffit de trouver w tel que

$$Q\, w(t) = t^{-k}\, f(t)$$

et
$$w(t) \in X(\varepsilon)$$

Or, Q est un opérateur du type de Fuchs dont l'équation détermi- nante est $F(\lambda+k) = 0$, si $F(\lambda) = 0$ est l'équation déterminante de P. On est donc ramené à la situation précédente.

II. ETUDE DES ESPACES DE TRACES.

Les hypothèses du théorème 1 étant vérifiées, l'application

$$u \longmapsto u^{(j)}(o)$$

est une application linéaire continue de $W^P(\alpha_o, p_o, A_o\, ; \alpha_1, p_1, A_1)$ dans $A_o + A_1$, pour tout $j \leq k$. Cela résulte du théorème du graphe fermé. Désignons donc par $T_j^P(\alpha_o, p_o, A_o\, ; \alpha_1, p_1, A_1)$ l'image de l'espace W^P par l'application précé- dente, muni de la norme image.

Dans le cas où $P = t^m (\frac{d}{dt})^m$ les espaces W^P et T_j^P sont désignés habi- tuellement par W^m et T_j^m. Ce sont les espaces d'interpolation classiques étudiés dans LIONS-PEETRE [1].

Nous cherchons dans quel cas on a l'identité entre T_j^P et T_j^m. Tout d'abord, il faut que $\alpha_o + \frac{1}{p_o} + j > o$. Nous supposerons pour simplifier que

(2.1) $$\alpha_o + \frac{1}{p_o} > o.$$

D'autre part, nous allons devoir faire l'hypothèse suivante sur l'opérateur P :

(d) $\begin{cases} \text{L'équation déterminante de P admet effectivement comme racines} \\ \lambda = 0,1 \; ... \; k. \end{cases}$

On peut démontrer que si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il existe des relations linéaires et homogènes à coefficients non tous nuls entre les traces de $u \in W$, de sorte qu'on ne peut avoir identité entre les espaces T_j^p et les espaces de trace usuels, (par exemple, si $\lambda = o$ n'est pas racine, on a $u \in W \Longrightarrow u(o) = 0$).

Dans l'énoncé du théorème 2, nous supposerons qu'on a l'inclusion algébrique et topologique

(2.2) $\quad A_o \hookrightarrow A_1$.

On pourrait donner un résultat analogue pour un couple compatible (A_o, A_1) quelconque, à condition de faire des hypothèses sur le comportement de l'opérateur P sur l'intervalle $(1,\infty)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 2 : Soient A_o et A_1 deux espaces de Banach vérifiant (2.2), quatre nombres réels $\alpha_o, \alpha_1, p_o, p_1$ et deux entiers k et m vérifiant (1) et (2.1), un opérateur du type de Fuchs P d'ordre m vérifiant les hypothèses (a) et (d) et de plus $\alpha_o + \frac{1}{p_o} > 0$.

Alors, pour tout entier j tel que

$$o \leq j \leq k$$

les espaces $T_j^p(\alpha_o, p_o, A_o \; ; \; \alpha_1, p_1, A_1)$ et $T_j^m(\alpha_o, p_o, A_o \; ; \; \alpha_1, p_1, A_1)$ sont identiques, et leurs normes sont équivalentes.

Démonstration de l'inclusion $T_j^m \hookrightarrow T_j^p$.

Soit $u \in W^m$, et $j \leq k$. Il s'agit de construire $v \in W^p$ tel que

(2.3) $$\begin{cases} v^{(j)}(o) = u^{(j)}(o) \\ v^{(j')}(o) = o \text{ si } j' \neq j \text{ et } j' \leq k. \end{cases}$$

Tout d'abord, nous allons transformer l'expression de l'opérateur P au moyen du lemme suivant, que nous démontrerons au § III.

Lemme 1 : Soit P un opérateur du type de Fuchs vérifiant les hypothèses du théorème 2, et $j \leq k$. Alors, il existe des fonctions $\varphi(t)$ et $C_\ell(t) \in \mathscr{C}^\infty(]o,1[)$ telles que :

(2.4) $\varphi \in \mathscr{C}^k([o,1[)$, $\varphi^{(j)}(o) = 1$, $\varphi^{(j')}(o) = 0$ si $j' \neq j$ et $j' \leq k$.

$C_\ell(t)$ bornées sur $]o,1[$

$$P\left(\frac{\varphi(t)\ u(t)}{t^j}\right) = \sum_{\ell=o}^{m-1} C_\ell(t)\ \left(t\frac{d}{dt} - j\right)\ \left(t\frac{d}{dt}\right)^\ell u(t) \quad \forall u \in \mathscr{D}'(o,1).$$

Remarque : Si les fonctions $\frac{\varphi(t)}{t^j}$ et $C_\ell(t)$ sont bornées sur $]o,\infty[$, l'inclusion $T_j^m \hookrightarrow T_j^p(A_o,A_1)$ sera valable pour tout couple compatible (A_o,A_1).

1ère étape. Construction de v.

Choisissons $K \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jx} K(x)\,dx \neq 0$.

En adoptant la notation $\tilde{v}(x) = v(e^x)$, définissons une distribution W sur $]o,\infty[$ à valeurs dans $A_o + A_1$ par

(2.5) $$\tilde{W} = \underbrace{D_x(D_x-1)\ \ldots\ (D_x-m+1)}_{D_x - j \text{ excepté}}K * \tilde{u}.$$

Puis, on définit v par

$$v(t) = \frac{\varphi(t)\ w(t)}{t^j}\ ,$$

2ème étape : vérifications.

a) majoration de v. De (2.5) résulte :

$$e^{(\alpha_0+\frac{1}{p_0})x}\,\tilde u(x) \in L^{p_0}(\mathbb{R},A_0) \Longrightarrow e^{(\alpha_0+\frac{1}{p_0})x}\,\tilde w(x) \in L^{p_0}(\mathbb{R},A_0),$$

c'est-à-dire :

$$t^{\alpha_0}\,u(t) \in L^{p_0}(o,\infty,A_0) \Longrightarrow t^{\alpha_0}\,w(t) \in L^{p_0}(o,\infty,A_0)$$

Comme $\frac{\varphi(t)}{t^j}$ est borné sur $[0,1]$, on a :

$$t^{\alpha_0}\,v(t) \in L^{p_0}(o,1,A_0).$$

b) majoration de Pv(t). En utilisant l'écriture (2.4) de l'opérateur P, pour démontrer que :

$$(2.6)\qquad t^{\alpha_1-m}\,Pv(t) \in L^{p_1}(o,1,A_1),$$

il suffit de démontrer que

$$e^{(\alpha_1-m+\frac{1}{p_1})}\,(D_x-j)\,D_x^{\ell}\,\tilde u \in L^{p_1}(\mathbb{R},A_1).$$

or, d'après (2.5) :

$$(D_x-j)\tilde u = K * D_x(D_x-1)\ \dots\ (D_x-m+1)\tilde u,$$

ce qui démontre (2.6).

c) calcul des traces de v. Commençons par calculer les traces de W :

$$W^{(j')}(o) = \lim_{x\to-\infty} e^{-j'x}\,D_x(D_x-1)\ \dots\ (D_x-j'+1)\,\tilde w(x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\Big[e^{-j'x}\underbrace{D_x(D_x-1)\dots(D_x-m+1)K}_{D_x-j\ \text{excepté}}\Big] * \Big[e^{-j'x}D_x(D_x-1)\dots(D_x-j'+1)\tilde u\Big]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j'x}\underbrace{D_x(D_x-1)\dots(D_x-m+1)K}_{(D_x-j)\ \text{excepté}}(x)\,dx \times u^{j'}(o).$$

Donc

. si $j' \neq j$ et $j' \leq k$ $\quad w^{(j')}(o) = 0$

. $w^{(j)}(o) = u^{(j)}(o)\ (-1)^{m-j-1}\ j!\ (m-j-1)!\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jx}\,K(x)\,dx.$

Comme d'autre part $\varphi^{(j')}(o) = 0$, on en déduit que :

$$\begin{cases} v^{j'}(o) = 0 \text{ si } j' \neq j \text{ et } j' \leq k. \\ v^{(j)}(o) = \frac{1}{j!} \; \varphi^{(j)}(o) \; w^{(j)}(o) = C \; u^{(j)}(o) \end{cases}$$

C étant une constante non nulle.

<u>3ème étape</u> : <u>prolongement éventuel sur</u> $[o,\infty[$.

Si les fonctions $\frac{\varphi(t)}{t^j}$ et $C_\ell(t)$ sont bornées sur $[o,\infty[$, on a obtenu $v \in W^P$ vérifiant (2.3) et l'inclusion $T_j^m \subsetneq T_j^P$ est démontré <u>sans utiliser l'inclusion</u> $A_o \subsetneq A_1$.

Sinon, on a seulement obtenu (2.3) et :

$$\begin{cases} t^{\alpha_o} \; v(t) \in L^{p_o}(o,1,A_o) \\ t^{\alpha_1 - m} \; pv(t) \in L^{p_1}(o,1,A_1). \end{cases}$$

Il nous reste à prolonger v en une fonction de $W^P(\alpha_o, p_o, A_o ; \alpha_1, p_1, A_1$ c'est-à-dire vérifiant les mêmes majorations sur $[o,\infty[$. C'est immédiat en utilisant l'inclusion $A_o \subsetneq A_1$.

<u>Démonstration de l'inclusion</u> $T_j^p \subsetneq T_j^m$.

Tout d'abord, nous allons démontrer cette inclusion pour j=0, et pour cela transformer l'expression de l'opérateur P au moyen du lemme suivant :

<u>Lemme 2</u> : Soit P un opérateur du type de Fuchs dont l'équation déterminante admet $\lambda = 0$ comme racine simple et pas d'autre racine de partie réelle nulle. Il existe des fonctions $\psi(t)$ et $b_\ell(t) \in \mathscr{C}^\infty\,(]o,1[)$ telles que :

$$\psi, \; b_\ell \in \mathscr{C}^o([o,1]) \qquad \psi(o) = 1$$

$$\psi(t) \; Pu(t) = \sum_{\ell=1}^{m} \left(t \frac{d}{dt}\right)^{\ell} (b_\ell(t) \; u(t)) \qquad \forall u \in \mathscr{D}'(]o,1[).$$

Soit alors $u \in W^p$. Il s'agit de construire $v \in W^m$ tel que $v(o) = u(o)$.

1ère étape : On se ramène au cas où u a son support dans $[o,1]$, en tronquant u par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^+})$ ayant son support dans $[o,1]$ et égale à 1 sur un voisinage de 0. (On utilise alors l'inclusion $A_o \hookrightarrow A_1$).

Si on peut prendre les fonctions $\psi(t)$ et $b_\ell(t)$ bornées sur $[o,\infty[$, cette opération est inutile et l'inclusion $T_o^p \hookrightarrow T_o^m$ sera démontrée sans utiliser l'inclusion $A_o \hookrightarrow A_1$.

2ème étape : Construction de v.

On choisit $K \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx \neq o$ et on définit v par la relation :

$$\tilde{v} = K * \sum_{\ell=1}^{m} D_x^{\ell-1}(\tilde{b}_\ell\ \tilde{u}) = \sum_{\ell=1}^{m} (D_x^{\ell-1}K) * (\tilde{b}\ \ \tilde{u}).$$

(toujours avec la notation $\tilde{u}(x) = u(e^x)$).

3ème étape : Vérifications.

a) on a encore :

$$t^{\alpha_o}\ u(t) \in L^{p_o}(o,\infty,A_o) \Longrightarrow t^{\alpha_o}\ v(t) \in L^{p_o}(o,\infty,A_o)$$

b) En utilisant l'écriture (2.7) de l'opérateur P, on obtient :

$$e^{(\alpha_1 - m + \frac{1}{p_1})x}\ D_x(D_x-1)\ \dots\ (D_x-m+1)\ \tilde{v} =$$

$$= \left[e^{(\alpha_1 - m + \frac{1}{p_1})x}\ (D_x-1)\ \dots\ (D_x-m+1)K\right] * \left[e^{(\alpha_1 - m + \frac{1}{p_1})x}\ \widetilde{Pu}(x)\right]$$

donc

$$t^{\alpha_1 - m}\ Pu(t) \in L^{p_1}(A_1) \Longrightarrow t^{\alpha_1}\ v^{(m)} \in L^{p_1}(A_1)$$

c) Calculons la trace $v(o)$.

$$v(o) = \lim_{x \to -\infty} \tilde{v}(x) = \lim_{x \to -\infty} \sum_{\ell=1}^{m} (D_x^{\ell-1}K) * [\tilde{b}_\ell\ \tilde{u}(x)]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{\ell-1}K(x)\,dx\right) b_\ell(o)\ u(o)$$

$$= b_1(o)\ u(o) \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx.$$

Or $b_1(o) \neq 0$. Reportons-nous à l'écriture (2.7) de l'opérateur P. En égalant les équations déterminantes des deux membres, on obtient :

$$\psi(o)\ F(\lambda) = \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell(o)\ \lambda^\ell$$

Comme $\lambda=0$ est supposée racine simple de l'équation déterminante $F(\lambda)$, on a bien $b_o(o) \neq 0$.

L'inclusion $T_o^p \subsetneq T_o^m$ est donc démontrée.

Démontrons maintenant l'inclusion $T_j^p \subsetneq T_j^m$ par récurrence sur j.

Supposons-la démontrée à l'ordre $0,1,\ldots,j-1$, et soit $u \in W^p$. D'après l'hypothèse de récurrence $u^{(j')}(o) \in T_j^m$, pour $j' \leq j-1$. En démontrant l'inclusion $T_{j'}^m \subsetneq T_{j'}^p$, on a vu qu'on pouvait construire $u_1 \in W^p$ tel que $u_1^{(j')}(o) = u^{j'}(o)$ pour tout $j' \leq j-1$ et $u_1^j(o) = 0$. En remplaçant u par $u-u_1$, on est donc ramené au cas où toutes les traces 'ordre inférieur à j de u sont nulles.

Soit donc $u \in W^p$ tel que $u^{j'}(o) = 0$ si $j' \leq j-1$. On a par conséquent :

$$\lim_{t\to o} \frac{u_j(t)}{t^j} = \frac{u^{(j)}(o)}{j\,!}\ .$$

Posons $v(t) = \dfrac{u(t)}{t^j}$ et $P_j\ v(t) = t^{-j}\ P(t^j v)$.

P_j est un opérateur du type de Fuchs dont l'équation déterminante admet $\lambda = 0$ comme racine simple et pas d'autre racine de partie réelle nulle. L'inclusion

$$T_o^{p_j}(\alpha_o+j,\ p_o,\ A_o\ ;\ \alpha_1+j,\ p_1, A_1) \subset T_o^m(\alpha_o+j,\ p_o,\ A_o\ ;\ \alpha_1+j, p_1, A_1)$$

est donc vraie.

(La démonstration de cette inclusion n'utilisait que les hypothèses du lemme 2).

$$\begin{cases} t^{\alpha_o+j}\ v(t) \in L^{p_o}(A_o) \\ t^{\alpha_1+j}\ P_j\ v(t) \in L^{p_1}(A_1), \end{cases}$$

donc

$$v(o) = \frac{u^j(o)}{j\,!} \in T_o^m(\alpha_o + j,\ p_o, A_o\ ;\ \alpha_1 + j,\ p_1, A_1)$$
$$= T_j^m(\alpha_o,\ p_o,\ A_o\ ;\ \alpha_1,\ p_1, A_1).$$

III.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer les lemmes 1 et 2. Remarquons tout d'abord que tout opérateur du type de Fuchs peut s'écrire :

(3.1) $$P = \sum_{\ell=o}^{m} a_\ell(t)\ (t\,\frac{t}{dt})^\ell\ ,$$

l'équation déterminante étant égale à $\sum_{\ell=o}^{m} a_\ell(o)\ \lambda^\ell = 0$.

Démonstration du lemme 1.

1ère étape : Nous allons démontrer que, si P vérifie les hypothèses du théorème 2, et si $j \leq k$, il existe une fonction $\varphi_j \in C^\infty(]o\ 1[)$ telle que :

(3.2) $$\begin{cases} \varphi_j \in C^k([o,1]) \quad \varphi_j^{(j)}(o) = 1 \quad \varphi_j^{(j')}(o) = 0 \text{ si } j' \neq j \text{ et } j' \leq k \\ P_{\varphi_j}(t) = 0 \end{cases}$$

Cela résulte du "théorème de Fuchs C^∞". Ce théorème nous assure l'existence de fonctions continues $u_{j'}(t) \in \operatorname{Ker} P$ telles que

$$\lim_{t \to o} \frac{u_{j'}(t)}{t^{j'}} = 1 \qquad j' \leq k.$$

D'après l'hypothèse (a), toutes ces fonctions sont de classe $C^k([o,1])$. Poiur construire nos fonctions φ_j il suffit de prendre :

$$\varphi_k = u_k$$
$$\varphi_{k-1}(t) = u_{k-1}(t) - u_{k-1}(o)\ \varphi_k(t).$$
$$\varphi_{k-2}(t) = u_{k-2}(t) - u_{k-2}^{(k-1)}(o)\ \varphi_{k-1}(t) - u_{k-2}^{(k)}(o)\ \varphi_k(t).$$

etc...

2ème étape : Les conditions (3.2) entraînent :

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^{\ell}\left(\frac{\varphi_j(t)}{t^j}\right) \text{ continu sur } [o,1] \ , \ o \leq \ell \leq m.$$

L'opérateur P étant écrit sous la forme (3.1), l'opérateur

(3.3) $$u \longmapsto P\left(\frac{\varphi(t)\ u(t)}{t^j}\right)$$

peut encore s'écrire sous la forme (3.1) avec d'autre coefficients, qui sont continus sur $[o,1]$. (On utilise la formule de Leibnitz).

Or, l'image par l'opérateur (3.3) de la fonction t^j est nulle, d'après (3.2). On peut donc écrire :

$$P\left(\frac{\varphi(t)\ u(t)}{t^j}\right) = \sum_{\ell=o}^{m-1} C_\ell(t)\ \left(t\frac{d}{dt}\right)^{\ell}\ \left(t\frac{d}{dt} - j\right),\ C_\ell \in C^o([o,1]).$$

Le lemme 1 est donc démontré.

Démonstration du lemme 2.

Tout opérateur du type de Fuchs peut aussi s'écrire :

(3.4) $$Pu(t) = \sum_{\ell=o}^{m} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{\ell} (b_\ell(t)\ u(t)).\quad b_\ell \in \mathcal{C}^\infty([o,1]).$$

Si l'on pose :
$$Qu(t) = \sum_{\ell=o}^{m} (-1)^\ell\ b_\ell(t)\ \left(t\frac{d}{dt}\right)^{\ell} u(t),$$

Q est aussi un opérateur du type de Fuchs. Si on fait le changement de variable $t=e^x$, P et Q se transforment en deux opérateurs $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ qui sont adjoints l'un de l'autre. Si $F(\lambda) = 0$ est l'équation déterminante de P, celle de Q est $F(-\lambda) = 0$. Par conséquent, si P vérifie l'hypothèse du lemme 2, il en est de même de Q. D'après le "théorème de Fuchs C^∞ ", on sait qu'il existe ψ tel que

$$\begin{cases} \psi \in C^o([o,1]) \quad \psi(o) = 1 \qquad Q\psi = 0. \\ \psi,\ t\psi',\ \ldots,\ t^m \psi^m \in C^o([o,1]). \end{cases}$$

Par conséquent, l'opérateur :

(3.5) $$u \longmapsto Q(\psi\ u)$$

peut encore s'écrire sous la forme (3.4) avec d'autres coefficients, que nous noterons encore $b_\ell(t)$, et qui sont continus sur $[0,1]$, le coefficient $b_0(t)$ étant nul (puisque l'image par l'opérateur (3.5) d'une constante est nulle).

Si on fait en sens inverse la transformation qui a fait passer de l'opérateur P à l'opérateur Q (c'est-à-dire, changement de variable $t=e^x$, passage à l'adjoint...), l'opérateur (3.5) se transforme en l'opérateur :

$$u \longmapsto \psi\, Pu.$$

On peut donc écrire :

$$\psi(t)\, Pu(t) = \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell(t) \left(t \frac{d}{dt}\right)^\ell u(t).$$

Ce qui démontre le lemme 2. (cette opération a eu seulement pour but de supprimer le coefficient $b_0(t)$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIONS - PEETRE : "Sur une classe d'espaces d'interpolation" Publ. Math. I.H.E.S. 19 (1964).

[2] NOURRIGAT : "Un théorème de traces". (à paraître aux C.R.A.S.).