MONIQUE TOUGERON

Comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur elliptique dégénéré

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 6, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___1_A6_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES D'UN OPERATEUR ELLIPTIQUE DEGENERE

D'après NORDIN

par

Monique TOUGERON

Introduction :

Dans le cas particulier où $A = -\sum_j D_j\ (\varphi D_j)$ et où $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ est constant sur Γ, Nordin améliore le résultat de Baouendi et Goulaouic [1] concernant le comportement du nombre $N(\lambda)$ de valeurs propres inférieures à λ ; (au lieu d'un encadrement, il obtient un équivalent de $N(\lambda)$ lorsque $\lambda \to \infty$).

I - FORMULE DE COURANT-FISHER

1. Opérateurs bornés (Riesz-Nagy [4] ou Courant Hilbert [2])

Données : H espace de Hilbert de dimension infinie ; $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint compact dans H, strictement positif.

Résultat : Si $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k \longrightarrow 0$ désigne la suite des valeurs propres de T, on a :

$$\mu_k = \operatorname*{Min}_{\substack{\mathcal{L}\text{ sev de } H\\ \dim\mathcal{L}\leq k-1}}\ \operatorname*{Max}_{\substack{u\in\mathcal{L}^\perp\\ u\neq 0}}\ \frac{(Tu,u)_H}{\|u\|_H^2}$$

2. Opérateurs non bornés

Données : $(A,D(A))$ non borné, auto-adjoint, strictement positif dans H ; injection de $D(A)$ dans H compacte.

Résultat : Si $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \longrightarrow +\infty$, désigne la suite des valeurs propres de $(A,D(A))$, on a :

$$\lambda_k = \underset{\substack{\mathcal{L} \text{ sev de } D(A^{1/2}) \\ \dim \mathcal{L} \leq k-1}}{\mathrm{Max}} \quad \underset{\substack{u \in \mathcal{L}^{\perp}_{D(A^{1/2})} \\ u \neq 0}}{\mathrm{Min}} \quad \frac{\|A^{1/2}u\|_H^2}{\|u\|_H^2}$$

3. <u>Formes quadratiques</u>

<u>Données</u> : $a(u)$, $b(u)$ fonctionnelles quadratiques définies positives sur un espace vectoriel W ; V désigne le complété de W pour la norme $(a(u))^{1/2}$, H le complété de W pour $(b(u))^{1/2}$; $a(u,v)$ et $b(u,v)$ formes sesquilinéaires associées à $a(u)$ et $b(u)$ sont des produits scalaires sur V et H ; on suppose que l'on a les inclusions $W \subset V \subset H$ et que : $\forall\, u \in V$, $a(u) \geq b(u)$.

<u>Résultat</u> : D'après un théorème de Friedrichs (Riesz-Nagy [4]), il existe un unique opérateur non borné $(A,D(A))$ dans H, auto-adjoint, de domaine $D(A) \subset V$, vérifiant : $a(u,v) = b(Au,v)$ pour tous $u \in D(A)$, $v \in V$; de plus A est positif, $D(A)$ est dense dans V et $D(A^{1/2}) = V$; si de plus l'injection de V dans H est compacte, le $k^{\text{ième}}$ valeur propre de $(A,D(A))$ donnée en 2) s'exprime aussi par :

$$\lambda_k = \underset{\substack{\mathcal{L} \text{ sev de } V \\ \dim \mathcal{L} \leq k-1}}{\mathrm{Max}} \quad \underset{\substack{u \in \mathcal{L}^{\perp}_{V} \\ u \neq 0}}{\mathrm{Min}} \quad \frac{a(u)}{b(u)}$$

On dit que $(A,D(A))$ est l'extension de Friedrichs associée à a, b et W, et que λ_k est la $k^{\text{ième}}$ valeur propre associée à (a,b,W). (Par abus de langage, on parlera de l'extension de Friedrichs associée à a,b,W quand il faudra prendre celle associée à $a+b,b,W$ et lui retrancher l'identité, lorsqu'on aura $a(u) \geq 0$ au lieu de $a(u) \geq b(u)$).

II - PREMIERE APPLICATION DE LA FORMULE DE COURANT-FISHER

Données :

. Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, de bord Γ, tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord de classe C^∞.

. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n,R)$ vérifiant $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > o\}$, $\Gamma = \{x \mid \varphi(x) = o\}$, $d\varphi(x) \neq o$ sur Γ.

On note $V = \{u \in L^2(\Omega),\ \sqrt{\varphi}\ D_i\ u \in L^2(\Omega),\ \ i = 1,\dots,n\}$.

. $a(u)$, $b(u)$ formes quadratiques intégro-différentielles définies dans V

$$\begin{cases} a(u) = \int_\Omega \varphi \sum_j (D_j u)^2\, dx = \sum_j \|\sqrt{\varphi} D_j u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ b(u) = \int_\Omega u^2\, dx = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

Résultat : Les "données" de I.3) sont satisfaites par a+b,b,V ; d'après Baouendi-Goulaouic [2], l'extension de Friedrichs associée à a,b,V est donc l'opérateur $(A,D(A))$ non borné dans $L^2(\Omega)$ défini par :

$$D(A) = \{u \in H^1(\Omega),\ \varphi\, u \in H^2(\Omega)\}\ ,\qquad Au = -\sum_j D_j(\varphi D_j u)\ ;$$

et, l'injection de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, la $k^{\text{ième}}$-valeur propre de $(A,D(A))$ est donnée par :

$$\lambda_k = \underset{\substack{\mathcal{L}\ \text{sev de}\ V \\ \dim \mathcal{L} \leq k-1}}{\operatorname{Max}}\ \underset{\substack{u \in \mathcal{L}^{\perp}_V \\ u \neq o}}{\operatorname{Min}}\ \frac{a(u)}{b(u)}.$$

III - ETUDE DE LA FONCTION $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega)$.

Soit Ω_1 un ouvert contenu dans Ω ; on note $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_1)$, (resp. $N(\lambda, \frac{a}{b}, \overline{\Omega}_1)$) le nombre de valeurs propres associées à $(a,b, C^1_o(\Omega_1))$, (resp. $(a,b, C^1(\overline{\Omega}_1))$) inférieures ou égales à λ. De la formule de Courant-Fisher on déduit :

1) λ et Ω_1 étant fixés si $\frac{a}{b}$ croît, $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_1)$ décroît, (resp. $N(\lambda, \frac{a}{b}, \overline{\Omega}_1)$).

2) λ et $\frac{a}{b}$ étant fixés, si Ω_1 décroît $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_1)$ et $N(\lambda, \frac{a}{b}, \overline{\Omega}_1)$ décroissent.

3) λ et $\frac{a}{b}$ étant fixés, si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$ et $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$, alors posant

$$N(\Omega) = N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega),$$

on a

$$N(\Omega_1) + N(\Omega_2) \leq N(\Omega) \leq N(\overline{\Omega}) \leq N(\overline{\Omega}_1) + N(\overline{\Omega}_2).$$

IV - COMPORTEMENT DE $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega)$ LORSQUE $\lambda \to +\infty$

Dans le cas particulier où la dérivée normale (intérieure) de φ sur Γ, $\varphi_\nu = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$, est constante sur Γ, on se propose de démontrer que :

(1) $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega)$ est équivalent à $\sigma_n(\lambda)$ quand $\lambda \to \infty$

avec $\sigma_2(\lambda) = d_2\, \lambda \operatorname{Log} \lambda$, $\sigma_n(\lambda)\ d_n\ \lambda^{n-1}$ pour $n \geq 3$, et $d_2 = \frac{c_1}{4} (\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})^{-1/2}$,

$$d_n = (n-1)\ c_{n-1}\ (\frac{\partial\varphi}{\partial\nu})^{\frac{1-n}{2}} \int_1^\infty [\frac{t+1}{2}]\ t^{-n}\, dt \text{ pour } n \geq 3,$$

$$c_{n-1} = (2\Pi)^{1-n}\ \omega_{n-1}\ (\frac{\partial}{\partial\nu})^{\frac{1-n}{2}}\ \operatorname{vol}(\Gamma) \text{ pour } n \geq 2,$$

ω_n désignant le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

1. Localisation au voisinage de Γ

Γ étant une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$ de dimension $(n-1)$, on peut trouver un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, recouvrant Γ, dans chacun desquels (y,t), (où y est l'intersection avec Γ de l'unique géodésique minimal passant par x et normale à Γ, et t la distance de x à y), soit un système de coordonnées. Pour ε assez petit, on note alors :

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid o < t < \varepsilon\}$$

et Ω^*_ε le complémentaire de Ω_ε dans Ω. De III 3), on déduit alors :

$$N(\Omega_\varepsilon) \leq N(\Omega) \leq N(\overline{\Omega}_\varepsilon) + N(\overline{\Omega^*_\varepsilon}),$$

et donc

$$\underline{\lim_{\lambda}} \frac{N(\lambda,\Omega_\varepsilon)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \underline{\lim} \frac{N(\lambda,\Omega)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \overline{\lim} \frac{N(\lambda,\Omega)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \overline{\lim} \frac{N(\overline{\Omega}_\varepsilon)}{\sigma_n(\lambda)} + \overline{\lim} \frac{N(\overline{\Omega^*_\varepsilon})}{\sigma_n(\lambda)}$$

L'extension de Friedrichs associée à $(a,b,\overline{\Omega^*_\varepsilon})$ est $(A,D(A))$ où A est un opérateur uniformément elliptique dans $\overline{\Omega^*_\varepsilon}$ et $D(A)$ le domaine du problème de Neumann dans $\overline{\Omega^*_\varepsilon}$; le comportement à l'infini de $N(\lambda,\overline{\Omega^*_\varepsilon})$ est donc connu (Garding[3]) : il est de type $O_\varepsilon(\lambda^{n/2})$; ceci réduit le suite d'inégalités ci-dessus à :

$$\underline{\lim} \frac{N(\Omega_\varepsilon)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \underline{\lim} \frac{N(\Omega)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \overline{\lim} \frac{N(\Omega)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \overline{\lim} \frac{N(\overline{\Omega}_\varepsilon)}{\sigma_n(\lambda)}$$

Pour avoir (1), il suffit donc de démontrer :

(2) ε étant fixé assez petit, $\underline{\lim} \dfrac{N(\Omega_\varepsilon)}{\sigma_n(\lambda)} = \overline{\lim} \dfrac{N(\overline{\Omega}_\varepsilon)}{\sigma_n(\lambda)} = 1.$

2. Séparation des variables

Dans le système de coordonnées (y,t), la métrique réiemannienne de $\mathbb{R}^n$ est

$$dt^2 + \sum_{j,k=1}^{n-1} g_{jk}(y,t)\, dy^j\, dy^k ,$$

donc sur Ω_ε et pour $u \in C^1_0(\Omega_\varepsilon)$ ou $C_1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$, on a

$$\begin{cases} a(u) = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(y,t) \left(\sum_{j;k=1}^{n-1} g^{jk}(y,t)\, \partial_j u\, \partial_k u + (\frac{\partial u}{\partial t})^2 \right) g^{1/2}\, dy\, dt \\ b(u) = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} u(y,t)^2\, g^{1/2}\, dy\, dt \end{cases}$$

avec $g = |\det(g_{jk})_{jk}|, (g^{jk})_{jk} = (g_{jk})^{-1}_{jk}$;

On pose $\gamma_{jk}(y) = g_{jk}(y,o)$ pour $j,k = 1,\dots,n-1$; $\sum_1^{n-1} \gamma_{jk}\, dy^j\, dy^k$ est alors la métrique induite par (g_{jk}) sur Γ.

On remarque que pour t petit, on a :

$$\varphi(y,t) = t\ \varphi'_t(y,o)\ (1+ C(t))$$

$$g^{1/2}(t,y) = g^{1/2}(o,y)\ (1+ O(t)) \equiv \gamma^{1/2}(y).(1+ O(t))$$

et $\sum_{j,k=1}^{n-1} g^{jk}(y,t)\, \partial_j u\, \partial_k u = (1+O(t)) \sum_{j,k=1}^{n-1} \gamma^{jk}(y)\, \partial_j u\, \partial_k u$;

si donc on pose :

$$\begin{cases} a_1(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} t\, \varphi'_t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_1^{n-1} \gamma^{jk}(y)\, \partial_j u\, \partial_k u \right) \gamma^{1/2}\, dy\, dt \\ b_1(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} u^2\, \gamma^{1/2}\, dy\, dt \end{cases}$$

on a :

i) $b(u)-b_1(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} O(t)\, u^2\, \gamma^{1/2}\, dy\, dt$, d'où $|b(u)-b_1(u)| < O(\varepsilon).b_1(u)$

ii) $$a(u)-a_1(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} t\, \varphi'_t(y,o)\, \gamma^{1/2} \Big[(1+O(t))\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + (1+O(t)) \sum_1^{n-1} \gamma^{jk}\, \partial_j u\, \partial_k u\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \sum_1^{n-1} \gamma^{jk}\, \partial_j u\, \partial_k u \Big]\, dy\, dt$$

La partie entre crochets est du type

$$O_1(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + O_2(t) \sum_1^{n-1} \gamma^{jk}\, \partial_j u\, \partial_k u \;;$$

on a donc :

$$|a(u) - a_1(u)| \le O(\varepsilon)\, a_1(u),$$

et, pour ε assez petit :

$$\frac{1}{1+O(\varepsilon)} \cdot \frac{a_1(u)}{b_1(u)} \le \frac{a(u)}{b(u)} \le \frac{a_1(u)}{b_1(u)} \cdot \frac{1}{1-O(\varepsilon)} \;;$$

d'où l'on déduit, d'après III 1)

$$\begin{cases} N(\lambda, \frac{a}{b}, \overline{\Omega}_\varepsilon) \le N(\lambda, \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{1}{1-O(\varepsilon)}, \overline{\Omega}_\varepsilon) \\ N(\lambda, \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{1}{1+O(\varepsilon)}, \Omega_\varepsilon) \le N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_\varepsilon) \end{cases}$$

et ceci est équivalent à :

$$N(\lambda(1+O(\varepsilon)), \frac{a_1}{b_1}, \Omega_\varepsilon) \le N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_\varepsilon) \le N(\lambda, \frac{a}{b}, \overline{\Omega}_\varepsilon) \le N(\lambda(1-O(\varepsilon)), \frac{a_1}{b_1}, \overline{\Omega}_\varepsilon)$$

Une condition suffisante pour avoir (2) est donc, ε étant fixé assez petit :

(3) $N(\lambda, \frac{a_1}{b_1}, \overline{\Omega}_\varepsilon)$ et $N(\lambda, \frac{a_1}{b_1}, \Omega_\varepsilon)$ équivalents à $\sigma_n(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow +\infty$,

et, posant

$$\omega(y,t) = u(y,t) \cdot \sqrt{\varphi_\nu}(y,o) \quad ; \quad a_2(\omega) = a_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_\nu}}\right) \quad , \quad b_2(\omega) = b_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_\nu}}\right) ,$$

(3) équivaut à

(4) $N(\lambda, \frac{a_2}{b_2}, \Omega_\varepsilon)$ et $N(\lambda, \frac{a_2}{b_2}, \bar{\Omega}_\varepsilon)$ équivalents à $\sigma_n(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow +\infty$.

3. Spectre d'un opérateur elliptique auto-adjoint sur Γ

On pose

$$\begin{cases} a_o(\omega) = \int_\Gamma \varphi_\nu \sum_1^{n-1} \gamma^{jk} \partial_j \left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_\nu}}\right) \cdot \partial_k\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_\nu}}\right) \gamma^{1/2} \, dy \\ b_o(\omega) = \int_\Gamma \frac{\omega^2}{\varphi_\nu} \gamma^{1/2} \, dy \end{cases}$$

alors $a_2(\omega)$ et $b_2(\omega)$ s'expriment par :

$$\begin{cases} a_2(\omega) = \int_o^\varepsilon t \left(\int_\Gamma \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 \gamma^{1/2} \, dy + a_o(\omega)\right) dt \\ b_2(\omega) = \int_o^\varepsilon b_o(\omega) \, dt \end{cases}$$

On étudie l'extension de Friedrichs associée à $a_o, b_o, C^1(\Gamma)$:

. Le complété de $C^1(\Gamma)$ pour $(b_o)^{1/2}$ est $L^2(\Gamma)$ car φ_ν est strictement positive sur Γ et Γ compacte.

. $(a_o+b_o)^{1/2}$ est une norme équivalente à

$$\|\omega\|_{H^1(\Gamma)} = \left[\sum_{j,k} \int_\Gamma \gamma^{jk} \partial_j \omega \, \partial_k \omega \, \gamma^{1/2} \, dy + \int_\Gamma \omega^2 \gamma^{1/2} \, dy\right]^{1/2}$$

donc le complété de $C^1(\Gamma)$ pour $(a_o+b_o)^{1/2}$ est $H^1(\Gamma)$.

. Soit A_o l'opérateur défini par

$$A_o(\omega) = - \sum_{j,k} \left(\frac{\varphi_\nu}{\gamma}\right)^{1/2} \cdot \partial_j\left(\gamma^{1/2} \cdot \varphi_\nu \gamma^{jk} \partial_k\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_\nu}}\right)\right) ;$$

on sait que $(A_o + 1, H^2(\Gamma))$ est auto-adjoint, semi-borné inférieurement par 1 dans $L^2(\Gamma)$; d'autre part

$H^2(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$ et $b_o((A_o+1)\,\omega_1,\omega_2) = (a_o+b_o)(\omega_1,\omega_2)$ pour tous $\omega_1 \in H^2(\Gamma)$, $\omega_2 \in H^1(\Gamma)$; c'est donc que $(A_o, H^2(\Gamma))$ est l'extension de Friedrichs associée à a_o, b_o et $C^1(\Gamma)$. Le comportement à l'infini de $N(\mu, \frac{a_o}{b_o}, \Gamma)$ est donc du type (Garding [3]) :

$$(5) \qquad N_o(\mu) \equiv N(\mu, \frac{a_o}{b_o}, \Gamma) \sim C_{n-1} \quad \mu^{n-1/2} \quad \text{quand} \quad \mu \to \infty$$

avec

$$C_{n-1} = (2\Pi)^{1-n} \cdot \omega_{n-1} \int_\Gamma \varphi_\nu^{\,1-n/2} \quad \gamma^{1/2} \quad dy$$

4. <u>Décomposition suivant les fonctions propres de</u> A_o

Soient $\{\mu_k\}_{k=o}^\infty$ les valeurs propres de $(A_o, H^2(\Gamma))$ et $\{h_k\}_{k=o}^\infty$ une base de fonctions propres correspondantes, orthonormale <u>pour</u> b_o dans $L^2(\Gamma)$. Pour $\omega \in C_o^1(\Omega_\varepsilon)$ ou $\omega \in C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$, on a :

$$\omega(y,t) = \sum_o^\infty b_o(\omega(y,t),h_j(y)).h_j(y) = \sum_o^\infty \omega_j(t).h_j(y) \text{ pour } o < t < \varepsilon$$

On pose alors :

$$\begin{cases} f(\mu) = f(\mu,u) = \displaystyle\int_o^\varepsilon t(u'(t)^2 + \mu\, u^2(t))\, dt \\ g(u) = \displaystyle\int_o^\varepsilon u(t)^2\, dt \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} a_2(\omega) = \varphi_\nu \displaystyle\sum_o^\infty f(\frac{\mu_j}{\varphi_\nu}, \omega_j) \\ b_2(\omega) = \displaystyle\sum_o^\infty g(\omega_j) , \end{cases}$$

$$\text{et} \quad N(\lambda, \frac{a_2}{b_2}, \Omega_\varepsilon) = N\left(\lambda, \frac{\sum_o^\infty \varphi_\nu\, f(\frac{j}{\varphi_\nu}, \omega_j)}{g(\ _j)}, \Omega_\varepsilon\right)$$

Mais un raisonnement de $n^{\text{ième}}$ diamètre permet d'écrire :

$$N(\lambda, \frac{a_2}{b_2}, \Omega_\varepsilon) = \sum_o^\infty N\left(\lambda, \varphi_\nu . f(\frac{\mu_j}{\varphi_\nu})/g \ , \ I_\varepsilon\right)$$

Une condition suffisante pour avoir (4) est alors :

$$(6)\quad \sum_{0}^{\infty} N\left(\frac{f(\frac{\mu_j}{\varphi_\nu})}{g}, J_\varepsilon, \frac{\lambda}{\varphi_\nu}\right) \sim \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \longrightarrow \infty, \text{ avec } J_\varepsilon = I_\varepsilon \text{ ou } \overline{I}_\varepsilon.$$

On pose encore $f'(u) = \int_0^\varepsilon t\,(1 - \frac{1}{\varepsilon}\,t)\,u_t'^2\,dt$; on a $f'(u) < f(\mu,u)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, donc d'après III.1),

$$(7)\qquad N(\frac{f(\mu)}{g}, \overline{I}_\varepsilon, \lambda) \leq N(\frac{f'}{g}, \overline{I}_\varepsilon, \lambda)$$

Or l'extension de Friedrichs associée à f', g et $C^1(\overline{I}_\varepsilon)$ est un opérateur dégénéré du type Baouendi-Goulaouic, avec $Au = -\frac{d}{dt}\,(t(1 - \frac{t}{\varepsilon}).\frac{du}{dt})$, la dégénérescence ayant lieu en 0 et ε ; donc

$$(8)\qquad N(\frac{f'}{g}, \overline{I}_\varepsilon, \lambda) = O(\sqrt{\lambda}) \text{ quand } \lambda \longrightarrow +\infty\ ,$$

et aussi $\sum_{0}^{j_0} N\left(\frac{f(\mu_j/\varphi_\nu)}{g}, \frac{\lambda}{\varphi_\nu}\right) = O(\sqrt{\lambda})$, avec $j_0 = \max\limits_{\mu_j \leq \frac{1}{\varphi_\nu}} j$, d'où

$$\sum_{0}^{j_0} N\left(\frac{f(\frac{\mu_j}{\varphi_\nu})}{g}, \frac{\lambda}{\varphi_\nu}\right) = o(\sigma_n(\lambda)).$$

Une condition suffisante pour avoir (6) est alors

$$\sum_{j_0}^{\infty} N\left(\frac{f(\frac{\mu_j}{\varphi_\nu})}{g}, J, \frac{\lambda}{\varphi_\nu}\right) \sim \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \to \infty, \text{ avec } J = I_\varepsilon \text{ ou } \overline{J}_\varepsilon$$

ou encore

$$(9)\qquad \int_{\mu=\frac{1}{\varphi_\nu}}^{\infty} N\left(\frac{f(\frac{\mu}{\varphi_\nu})}{g}, J, \frac{\lambda}{\varphi_\nu}\right).\ dN_0(\mu) \sim \sigma_n(\lambda).$$

5. Le lemme principal

i) Une autre écriture de (9)

Pour $\rho > o$, on considère les formes quadratiques

$$\begin{cases} F(\rho,v) = \int_o^\rho t\ (v'^2+v^2)\ dt \\ G(\rho,v) = \int_o^\rho v^2\ dt \end{cases}$$

alors pour $\mu > o$ et pour $v = u(\frac{t}{\sqrt{\mu}})$, on a :

$$\begin{cases} f(\mu,u) = F(\varepsilon\sqrt{\mu}\ ,v) \\ g(u) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\ G(\varepsilon\sqrt{\mu}\ ,\ v) \end{cases}$$

On pose $M(\lambda,\rho) = N(\frac{F(\rho)}{G(\rho)}, I_\rho, \lambda)$ et $\overline{M}(\lambda,\rho) = N(\frac{F(\rho)}{G(\rho)}, \overline{I}_\rho, \lambda)$, alors $N(\frac{f(\mu)}{g}, J, \lambda) = M(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}, \varepsilon\sqrt{\mu})$, et la condition (9) devient

$$\int_{\mu=\frac{1}{\varphi_\nu}}^\infty M\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}\ \varphi_\nu}, \frac{\varepsilon\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varphi_\nu}}\right)\ dN_o(\mu) \sim \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \to \infty, \text{ (de même avec } \overline{M}),$$

ou encore, faisant $\varphi_\nu\mu = \tau^2$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varphi_\nu}$:

(10) $$\int_{\tau^2=1}^\infty m(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon'\tau).dN_o(\frac{\tau^2}{\varphi_\nu}) \sim \sigma_n(\lambda)\ , \qquad m = M \text{ ou } \overline{M}.$$

ii) Etude de la fonction $m(\lambda,\rho)$

On va démontrer le lemme suivant :

Lemme : Soit $\lambda > o$, $m = M$ ou $\overline{M}$, on a :

a) $o < \rho_o \leq \lambda \leq \rho \implies m(\lambda,\rho) = \frac{\lambda}{2} + O(\lambda^{3/4})$

b) $\lambda > \rho > \rho_o > o \implies m(\lambda,\rho) = O_{\rho_o}(\sqrt{\lambda\rho})$

c) A entier pair positif et $o < \delta < 1$ étant donnés, il existe $\rho_o > A$ tel que pour $\lambda \leq A$ et $\rho \geq \rho_o$, on ait $m(\lambda,\rho) = [\frac{\lambda+1}{2}]$, sauf si λ appartient à des intervalles symétriques de longueur 2δ autour des entiers impairs 1,3,5,..., où la différence aux deux extrémités est au plus 1 en valeur absolue.

Démonstration :

α) Remarque préliminaire

. Pour $\rho_2 > \rho_1 > o$ et $I =]\rho_1,\rho_2[$, on considère encore :

$$\begin{cases} F(\rho_1,\rho_2,v) = \displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} t(v'^2+v^2)\,dt \\ G(\rho_1,\rho_2,v) = \displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} v^2\,dt \end{cases},$$

et on note $m(\lambda,\rho_1,\rho_2)$ avec $m = M$ ou $\overline{M}$, les fonctions $N\left(\frac{F(\rho_1,\rho_2)}{G(\rho_1,\rho_2)},\lambda\right)$ associées à $F(\rho_1,\rho_2)$, $G(\rho_1,\rho_2)$ et $C_o^1(I)$ ou $C^1(\overline{I})$.

. On remplace $F(\rho_1,\rho_2,v)$ par $C.F'(\rho_1,\rho_2,v) = C.\int_{\rho_1}^{\rho_2}(v'^2+v^2)\,dt$, où $C > o$, et on note λ_k, resp. $\overline{\lambda}_k$, la $k^{\text{iè}}$ valeur propre associée à $(CF', G, C_o^1(I))$, resp. $(CF', G, C^1(\overline{I}))$. L'extension de Friedrichs associée à $(CF', G, C_o^1(I))$ est $(A,D(A))$ avec $D(A) = H_o^1 \cap H^2(\rho_1, \rho_2)$, $Au = -Cu'' + Cu$, et $(A,D(\overline{A}))$ avec $D(\overline{A}) = \{u \in H^1, \frac{d^2u}{dt^2} \in L^2, \frac{du}{dt}(\rho_1) = \frac{du}{dt}(\rho_2) = 0\}$ si $C_o^1(I)$ est remplacé par $C^1(\overline{I})$. Tout couple propre (λ,u) pour $(A,D(A))$ où $(A,D(\overline{A}))$ vérifie : $-Cu'' + Cu' = \lambda u$, c'est-à-dire est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $-Cr^2 + (C-\lambda) = o$; on en déduit que :

1) Il n'y a pas de valeur propre inférieure à C dans les deux cas.

2) $\lambda_1 > C$, $\overline{\lambda}_1 = C$ et $\overline{\lambda}_2 > C$

3) $\lambda_k = C\left[\left(\frac{k\,\Pi}{\rho_1-\rho_2}\right)^2 + 1\right]$, k=1,2,... et $\overline{\lambda}_{k+1} = \lambda_k$ pour k=1,2,...

. De l'inégalité : $\rho_1 \dfrac{F'(\rho_1,\rho_2)}{G(\rho_1,\rho_2)} \leq \dfrac{F(\rho_1,\rho_2)}{G(\rho_1,\rho_2)} \leq \rho_2 \dfrac{F'(\rho_1,\rho_2)}{G(\rho_1,\rho_2)}$, on déduit,

d'après III.1), $N(\rho_2 \frac{F'}{G}) \leq N(\frac{F}{G}) \leq N(\rho_1 \frac{F'}{G})$; mais comme

$N(C \frac{F'}{G},\lambda,I) = \left[\frac{\rho_2-\rho_1}{\pi} \sqrt{(\frac{\lambda}{C}-1)_+}\right]$ et $N(C \frac{F'}{G},\lambda,\bar{I}) = N(C \frac{F'}{G'},\lambda,I) + 1$, on a :

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{\pi} \sqrt{(\frac{\lambda}{\rho_2}-1)_+} -1 \leq m(\lambda,\rho_1,\rho_2) \leq \frac{\rho_2-\rho_1}{\pi} \sqrt{(\frac{\lambda}{\rho_1}-1)_+} + 1$$

β) Démonstration de a) :

Soit $\rho_o < \rho_1 < \dots < \rho_{\nu-1} = \lambda < \rho_\nu = \rho$ une partition de $[\rho_o,\rho]$, telle que celle de $[\rho_o,\lambda]$ soit équidistante. D'après III.3, on a :

$$\sum_{k=o}^{\nu-1} M(\lambda,\rho_k,\rho_{k+1}) \leq m(\lambda,\rho_o,\rho) \leq \sum_{k=o}^{\nu-1} \bar{M}(\lambda,\rho_k,\rho_{k+1}),$$ d'où, posant

$f(X) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{x}-1}$ pour $o < x \leq \lambda$, on déduit, d'après α),

$$-\nu + \sum_{k=o}^{\nu-3} (\rho_{k+1}-\rho_k)\, f(\rho_{k+1}) \leq m(\lambda,\rho_o,\rho) \leq \sum_{k=o}^{\nu-2} (\rho_{k+1}-\rho_k)\, f(\rho_k) + \nu \;;$$

cette dernière inégalité implique la suivante :

$$-\nu - \frac{\lambda^{3/2}}{(\nu-1)\sqrt{\rho_o}} + \int_{\rho_o}^{\lambda} f(X)\, dX \leq m(\lambda,\rho_o,\rho) \leq \int_{\rho_o}^{\lambda} f(x)\, dx + \frac{\lambda^{3/2}}{(\nu-1)\sqrt{\rho_o}} + \nu .$$

Comme $\displaystyle\int_{\rho_o}^{\lambda} f(X)\, dX = -\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_o}-1}}{\pi} + \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_o}-1}$ et $\displaystyle\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_o}-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_o}-1}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_o}-1}}\right)$ quand $\lambda \to \infty$, on a $\displaystyle\int_{\rho_o}^{\lambda} f(X)\, dX = \frac{\lambda}{2} + O_{\rho_o}(\lambda^{1/2})$ quand $\lambda \to \infty$ et :

$$-\frac{\lambda^{3/2}}{(\nu-1)\sqrt{\rho_o}} - \nu + O_{\rho_o}(\lambda^{1/2}) + \frac{\lambda}{2} \leq m(\lambda,\rho_o,\rho) \leq \frac{\lambda}{2} + O_{\rho_o}(\lambda^{1/2}) + \frac{\lambda^{3/2}}{(\nu-1)\sqrt{\rho_o}} + \nu ,$$

et donc, prenant ν assez grand par rapport à λ, $m(\lambda,\rho_o,\rho) = \frac{\lambda}{2} + O(\lambda^{3/4})$ quand $\lambda \to \infty$.

Enfin, $M(\lambda,\rho_o) + M(\lambda,\rho_o,\rho) \leq m(\lambda,\rho) \leq \bar{M}(\lambda,\rho_o) + \bar{M}(\lambda,\rho_o,\rho)$ d'après III.3. , et d'après (7), et (8) :

$M(\lambda,\rho_o) = N\left(\frac{f\left(\frac{\rho_o^2}{\varepsilon^2}\right)}{g}, I_\varepsilon, \frac{\rho_o\lambda}{\varepsilon}\right) = {}_{\rho_o}(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}})$, d'où $M(\lambda,\rho_o) = O_\varepsilon(\sqrt{\lambda})$ ainsi que $\overline{M}(\lambda,\rho_o)$, donc, d'après le calcul ci-dessus, on a bien a) du lemme.

γ) Démonstration de b)

Soit $\rho_o < \rho_1 < \ldots < \rho_\nu = \rho$ une partition équidistente de $[\rho_o,\rho]$. Comme en β) on écrit encore $m(\lambda,\rho_o,\rho) \leq \sum_{k=1}^{\nu-1} f(\rho_k).(\rho_{k+1}-\rho_k) + \nu$, et cette fois, on majore grossièrement la différence $\int_{\rho_o}^{\rho} f(X)\,dX - \sum_{k=1}^{\nu-1} f(\rho_k)\,(\rho_{k+1}-\rho_k)$ par $\frac{\rho-\rho_o}{\nu} f(\rho_o) = \frac{1}{\Pi\nu}(\rho-\rho_o).\frac{\sqrt{\lambda-\rho_o}}{\sqrt{\rho_o}}$, puis par $\rho\rho_o^{-1/2}\lambda^{1/2}\nu^{-1}$; comme $\int_{\rho_o}^{\rho} f(X)\,dX < \sqrt{\rho\lambda}$, (faire $x\lambda = t^2$), pour ν assez grand (de l'ordre de $\rho^{1/2}$), on obtient $m(\lambda,\rho_o,\rho) = O_{\rho_o}(\sqrt{\lambda\rho})$, ce qui ajouté à $m(\lambda,\rho) \leq \overline{M}(\lambda,\rho_o) + \overline{M}(\lambda,\rho_o,\rho)$,

et $\overline{M}(\lambda,\rho_o) = N\left(\frac{f(\frac{\rho_o^2}{\varepsilon^2})}{g}, I_\varepsilon, \frac{\rho_o\lambda}{\varepsilon}\right) = O_\varepsilon(\sqrt{\lambda\rho_o}) = O(\sqrt{\lambda\rho})$ implique b) du lemme.

δ) Démonstration de c)

. L'extension de Friedrichs associée à $(F(\rho))\,G(\rho)$, $C_o^1(I_\rho))$, resp. $C^1(I_\rho)$, est l'opérateur $(A,D(A))$, resp. $D(\overline{A})$, non borné dans $L^2(I_\rho)$, avec :

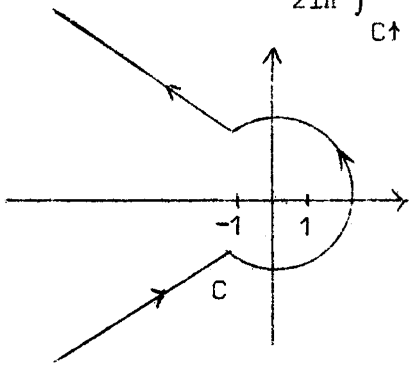
$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H^1(I_\rho),\ tu \in H^2,\ u(\rho) = 0\} \\ D(\overline{A}) = \{u \in H^1(I_\rho),\ tu \in H^2,\ \frac{du}{dt}(\rho) = 0\} \\ Au = -(tu')' + tu \end{cases}$$

. L'équation $-(tu')' + tu - \lambda u = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t > o$, est du type équation de Laplace ou équation du 2ème type de Fuchs, l'équation indicielle en 0 étant $\alpha^2 = 0$; elle admet donc pour base de solutions les fonctions :

$$\begin{cases} u_o(t) = 1 + t\,f_o(t) \\ u_1(t) = (1+t\,f_o(t))\,\mathrm{Log}\,t + tf_1(t), \end{cases}$$ f_o et f_1 étant analytiques en 0.

Il est de plus démontré dans Valiron [5] (méthode de Laplace), que

$$u(t,\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C\uparrow} e^{zt}\,(z-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}\,(z+1)^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)}\,dz,$$



où C est le contour ci-après, vérifie cette équation différentielle pour $t > o$; cette solution admet une limite finie quand $t \to o^+$, (faire $z' = t(z-1)$ dans l'intégrale), donc elle est multiple de $u_o(t)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

On vérifie facilement ensuite que toute solution vérifiant $t(\frac{du}{dt})^2 \in L^1(0,T)$, $T < +\infty$, est multiple de $u_o(t)$, donc aussi de $u(t,\lambda)$. Ainsi, les valeurs propres de $(A,D(A))$ sont les zéros réels positifs de $u(\rho,\lambda)$ et celles de $(A,D(\overline{A}))$ ceux de $\frac{du}{dt}(\rho,\lambda)$.

Maintenant $u(t,\lambda) = (2t)^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)}\,e^t\,v(t,\lambda)$ avec $v(t,\lambda)$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{C\uparrow} e^z\,z^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}\left(\frac{z}{2t}+1\right)^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)} dz \text{ et } \frac{dv}{dt}(t,\lambda) = \frac{\lambda+1}{4t^2}\,v(t,\lambda+2), \text{ d'où}$$

$$\frac{du}{dt}(t,\lambda) = (2t)^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)}\,e^t\,w(t,\lambda) \text{ avec } w(t,\lambda) = \left(1-\frac{\lambda+1}{2t}\right)v(t,\lambda) + \frac{\lambda+1}{4t^2}\,v(t,\lambda+2),$$

donc les zéros en λ de $u(t,\lambda)$ sont les mêmes que ceux de $v(t,\lambda)$ et ceux de $u'_t(t,\lambda)$ les mêmes que ceux de $w(t,\lambda)$.

D'autre part, $v(\infty,\lambda) = \dfrac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\lambda-1))}$ et $v(t,\lambda) \longrightarrow v(\infty,\lambda)$ quand $t \to \infty$, uniformément en λ sur tout compact. De même, $w(\infty,\lambda) = v(\infty,\lambda)$ et $w(t,\lambda) \longrightarrow w(\infty,\lambda)$ uniformément sur tout compact ; les zéros de $v(\infty,\lambda)$ sont exactement 1,3,5... et chacun est simple. Pour tout $t > o$, $\lambda \longrightarrow v(t,\lambda)$ est une fonction entière (théorème de Morera), ainsi que $v(\infty,\lambda)$, donc $v'_t(t,\lambda) \longrightarrow v'_t(\infty,\lambda)$ uniformément sur tout compact et $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{v'(t,\lambda)}{v(t,\lambda)}\,d\lambda \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{v'(\infty,\lambda)}{v(\infty,\lambda)}\,d\lambda$ pour tout contour fermé γ ne contenant pas de zéro de $v(\infty,\lambda)$. Les dernières intégrales ne sont autres que $Z_t - P_t$ où Z_t = nombre de zéros de $v(t,\lambda)$ contenus dans l'intérieur de γ, comptés avec leur multiplicité, P_t = nombre de pôles. En particulier, pour tout δ, $o<\delta<1$, si γ désigne le cercle de centre $2k+1$ et de rayon δ, pour tout $A=2p$, $p \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_o > A$ tq $\forall t \geq \rho_o$, $v(t,\lambda)$ a exactement ρ zéros dans $o < \mathrm{Re}\,\lambda < A$, un dans chaque disque de centre $2k+1$, $k=o,\dots,p-1$, et de rayon δ ; par ailleurs, $v(t,\overline{\lambda}) = -\overline{v(t,\lambda)}$, donc les zéros sont réels et on a c).

σ) Fin de la démonstration.

A l'aide du lemme précédent, on veut montrer, remplaçant ε' par ε dans (10) :

$$J = \int_{\tau^2=1}^{\infty} m(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau)\, dN_o(\frac{\tau^2}{\varphi_\nu}) \sim \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \to \infty,\ m = M \text{ ou } \overline{M}.$$

Pour λ assez grand, on décompose J en $J_1 = \int_{\tau=1}^{\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}$ et $I = \int_{\tau=\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\infty}$.

Déjà, d'après b) du lemme et (5),

$$J_1 = \sum_{1\leq \mu_j \leq \frac{\lambda}{\varepsilon}} m\,(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_j}}, \varepsilon\sqrt{\mu_j}) \leq N_o\,(\frac{\lambda}{\varepsilon\,\varphi_\nu}).\,O_\varepsilon(\sqrt{\lambda\varepsilon}) = O_\varepsilon(\lambda^{\frac{n}{2}}) = o(\sigma_n(\lambda)).$$

Il reste donc à montrer que $I \sim \sigma_n(\lambda)$ quand $\lambda \to \infty$

i) D'après c) du lemme, pour $A=2$, $o<\delta<\frac{1}{2}$, $\exists \rho_o > 2$ tq $\forall\lambda_1 \leq 2$, $\rho \geq \rho_o$, on ait $m(\lambda_1,\rho) = \left[\frac{\lambda_1+1}{2}\right]$ sauf si $\lambda_1 \in \left]1-\delta,\ 1+\delta\right[$; donc, si on fait $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\tau}$, $\rho = \varepsilon\tau$, pour $\lambda \geq \lambda_1'$, $\tau \geq \frac{\lambda}{1-\delta}$ avec $\lambda_1' > \frac{\rho_o(1-\delta)}{\varepsilon}$, on a $m(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau) = 0$.

D'autre part, $N_o(\frac{\tau^{22}}{\varphi_\nu}) \sim c_{n-1}\ (\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_\nu}})^{n-1}$ quand $\tau \to \infty$, implique : $\exists\tau_o$ tq $\tau \geq \tau_o$ entraîne $N_o(\tau^2) = (\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_\nu}})^{n-1}\ (c_{n-1} + O(1)\delta)$ et donc :

$$\exists\,\lambda_2' \text{ tq } \lambda \geq \lambda_2' \Longrightarrow N_o(\frac{\tau^2}{\varphi_\nu}) = (c_{n-1} + O(1)\delta).(\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_\nu}})^{n-1} \text{ pour } \tau \geq \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$$

Ainsi, pour $\lambda \geq \lambda' = \sup(\lambda_1', \lambda_2')$ on a simultanément :

$$\begin{cases} m(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau) = 0 \text{ pour } \tau \geq \frac{\lambda}{1-\delta} \\ N_o(\frac{\tau^{22}}{\varphi_\nu}) = (c_{n-1} + O(1)\delta)\ (\frac{\tau}{\sqrt{\ \ }_\nu})^{n-1} \text{ pour } \tau \geq \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \end{cases}$$

on en déduit que pour $\lambda \geq \lambda'$, $\displaystyle\int_{\tau=\frac{\lambda}{1-\delta}}^{\infty} m(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau)\, dN_o(\frac{\tau^2}{\varphi_\nu}) = o$ et donc

$$I = \int_{\tau=\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} m(\frac{\lambda}{\tau},\varepsilon\tau)\, dN_o(\frac{\tau^2}{\varphi_\nu}).$$

ii) on intègre I par parties :

$$I = \left[m(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau)\, N_o(\frac{\tau^2}{\varphi_\nu})\right]_{\tau=\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} - \int_{\tau=\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} N_o(\frac{\tau^2}{\varphi_\nu})\, dm\, (\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau) \equiv F_1 + F_2$$

or $F_1 = -\, m\, (\sqrt{\lambda\varepsilon}, \sqrt{\lambda\varepsilon})\, N_o\, (\frac{\lambda}{\varepsilon\varphi_\nu})$ d'après i), mais comme $m(\sqrt{\lambda\varepsilon}, \sqrt{\lambda\varepsilon}) = O(\sqrt{\lambda\varepsilon})$ d'après b) du lemme et $N_o(\frac{\lambda}{\varepsilon\varphi_\nu}) = O\,((\frac{\lambda}{\varepsilon\varphi_\nu})^{\frac{n-1}{2}})$, F_1 est du type $O_\varepsilon\,(\lambda^{\frac{n}{2}})$. Il reste donc à montrer que F_2 est équivalent à $\sigma_n(\lambda)$ quand $\lambda \to \infty$.

iii) d'après i), $F_2 = -(c_{n-1} + O(1)\delta) \displaystyle\int_{\tau=\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} (\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_\nu}})^{n-1}\, dm(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau)$ et devient par intégration par parties :

$$F_2 = \varphi_\nu^{-\frac{n-1}{2}}\left(-\left[m(\frac{\lambda}{\varepsilon},\varepsilon\tau).\tau^{n-1}\right]_{\tau=\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} (c_{n-1} + O(1)\delta) + (n-1)(c_{n-1} + O(1)\delta)\int_{\tau=\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} m(\frac{\lambda}{\tau},\varepsilon\tau)\tau^{n-2}d\tau\right)$$

$$\equiv \varphi_\nu^{-\frac{n-1}{2}}(G_1 + G_2)$$

Comme en ii), on utilise i) et b) du lemme pour montrer que $G_1 = O(\lambda^{\frac{n}{2}})$; il reste alors à montrer : $G_2 \sim \sigma_n(\lambda)\, \varphi^{\frac{n-1}{2}}$ quand $\lambda \to \infty$.

Déjà, pour n=2, d'après a) du lemme, $G_2 = (c_1 + O(1)\delta) \displaystyle\int_{\tau=\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} (\frac{\lambda}{2\tau} + O((\frac{\lambda}{\tau})^{3/4}))\, d\tau$

et donc $G_2 = (c_1 + O(1)\delta)\, (\frac{\lambda}{4} \operatorname{Log} \lambda + O(\lambda)) = (d_2\, \varphi_\nu^{1/2} + O(1)\delta)\, \lambda \operatorname{Log} \lambda + O(\lambda)$

et donc $G_2 \sim \sigma_2(\lambda)\, \varphi_\nu^{1/2}$ quand $\lambda \to \infty$.

iv) Maintenant, pour $n > 2$, $\displaystyle\int_1^{\infty} \left[\frac{t+1}{2}\right] t^{-n}\, dt$ est convergente donc :

$\exists A_o$, $A > \sup\,(A_o,\frac{1}{\delta})$ et A entier pair implique $\frac{1}{A} < \delta$ et $\displaystyle\int_A^{\infty} \left[\frac{t+1}{2}\right] t^{-n}\, dt < \delta$.

On décompose l'intégrale apparaissant dans G_2 en :

$$I_1 + I_2 \equiv \int_{\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\lambda/A} m(\frac{\lambda}{\tau},\varepsilon\tau)\ \tau^{n-2}\ d\tau + \int_{\lambda/A}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} m(\frac{\lambda}{\tau},\varepsilon\tau)\ \tau^{n-2}\ d\tau$$

d'après a) du lemme, $I_1 = \displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\lambda/A} (\frac{\lambda}{2\tau} + O((\frac{\lambda}{\tau})^{3/4}))\ \tau^{n-2}\ d\tau = O(1)\ \delta\ \lambda^{n-1}$

d'après c) du lemme, $I_2 = \displaystyle\int_{\lambda/A}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} \tau^{n-2}\left[\frac{\frac{\lambda}{\tau}+1}{2}\right] d\tau - \left(\int_{\frac{\lambda}{1+\sigma}}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} \left[\frac{\frac{\lambda}{\tau}+1}{2}\right]\tau^{n-2}\ d\tau + \int_{\frac{\lambda}{2+\sigma}}^{\frac{\lambda}{2-\sigma}} \cdots\right) +$

$$+ \left(\int_{\frac{\lambda}{1+\sigma}}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} m(\frac{\lambda}{\tau},\varepsilon\tau)\ \tau^{n-2}\ d\tau + \int_{\frac{\lambda}{2+\sigma}}^{\frac{\lambda}{2-\sigma}} \cdots\right)$$

et $\displaystyle\int_{\frac{\lambda}{2k-1+\delta}}^{\frac{\lambda}{2k-1-\delta}} \tau^{n-2}\left(m(\frac{\lambda}{\tau},\varepsilon\tau) - \left[\frac{\frac{\lambda}{\tau}+1}{2}\right]\right) d\tau \leq \int_{\frac{\lambda}{2k-1+\delta}}^{\frac{\lambda}{2k-1-\delta}} \tau^{n-2}\ d\tau$, donc :

$$I_2 = \int_{\lambda/A}^{\lambda} \left[\frac{\frac{\lambda}{\tau}+1}{2}\right] \tau^{n-2}\ d\tau + \int_{\lambda}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} \left[\frac{\frac{\lambda}{\tau}+1}{2}\right] \tau^{n-2}\ d\tau + O(1)\left(\sum_{k=1}^{p(\lambda,A)<+\infty} \int_{\frac{\lambda}{2k-1+\sigma}}^{\frac{\lambda}{2k-1-\delta}} \tau^{n-2}\ d\tau\right) ;$$

Or, la seconde intégrale est nulle, la première égale $\lambda^{n-1}\displaystyle\int_1^{\infty}\left[\frac{t+1}{2}\right]t^{-n}\ dt +$ $O(1)\ \delta\ \lambda^{n-1}$, et le dernier terme du type $O(1).\delta.\lambda^{n-1}$; on a donc :

$$I_1 + I_2 = O(1)\ \delta .\ \lambda^{n-1} + \lambda^{n-1}\int_1^{\infty}\left[\frac{t+1}{2}\right] t^{-n}\ dt$$

d'où $K \sim \varphi_\nu^{\frac{n-1}{2}}\ \sigma_n(\lambda)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI-GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.

[2] COURANT-HILBERT : Methods of Mathematical Physics - Interscience 1962.

[3] GARDING : On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators. Math. Scand 1 (1953), 237-255.

[4] RIESZ-NAGY : Leçons d'analyse Fonctionnelle - Gauthiers Villars.

[5] VALIRON : Equations fonctionnelles - Applications. Masson et C^{ie}.