MICHAËL KEANE

PIERRE MICHEL

Généralisation d'un lemme de « découpage » de Rokhlin

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2
« Probabilités », , p. 158-172

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___2_158_0>

GENERALISATION D'UN LEMME DE "DECOUPAGE" DE ROKHLIN

par

Michaël KEANE et Pierre MICHEL

Soient (Ω,β,m,T) un système dynamique apériodique et $(k_o,k_1,\ldots,k_{n-1})$ un ensemble fini d'entiers.

On constate qu'il n'est pas toujours possible de déterminer un ensemble mesurable A tel que les $T^{k_i}A$ soient deux à deux disjoints et recouvrent Ω à ε près. On étudie alors la mesure maximale de $\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i}A$.

On donne enfin un exemple de suite infinie $(k_o,k_1,\ldots,k_{n-1}\ldots)$ telle que la mesure maximale de $\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i}A$ ait une limite inférieure nulle.

1 - Le lemme de Rokhlin.-

Soit (Ω,β,m) un espace mesuré fini et T une transformation bi - mesurable de Ω dans lui-même, conservant la mesure.

T est apériodique si

$$m(\{\omega \mid \exists\, n \geq 1,\ T^n\omega = \omega\}) = 0.$$

Lemme de Rokhlin :

Si T est apériodique, pour tout entier positif n et tout nombre réel positif ε, il existe un ensemble mesurable A tel que les ensembles A , TA , T^2A, ... $T^{n-1}A$ soient deux à deux disjoints et vérifient

$$m\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} T^i A\right) < \varepsilon \quad .$$

2 - Notations.-

$$K = (k_i)_{i \in [0,n-1]} \; ; \; k_i \in N \; , \; k_0 = 0 \; , \; k_i < k_{i+1}$$

$$\mathcal{N}_K = \{N \; , \; N \in \mathbb{N} \; ; \; \forall\, k_i \in K \; , \; \forall\, k_j \in K$$
$$k_i \neq k_j \Longrightarrow (N+k_i) \cap (N+k_j) = \emptyset\} \; .$$

($\mathcal{N}_K$ n'est pas vide car il contient la suite
$N = (k_{n-1}+1,\ 2(k_{n-1}+1),\ 3(k_{n-1}+1) \dots))$
La densité extérieure de N sera notée $d^*(N)$:

$$d^*(N) = \overline{\lim}\ \frac{\text{card }(N \cap [0,n-1])}{n}$$

Enfin, nous poserons :

$$\mathcal{A}_K = \{A \; ; \; A \in B \; ; \; T^{k_i}A \cap T^{k_j}A = \emptyset \quad \forall\, i \neq j\}$$

3 - Lemme 1.-

Soit $\sigma = \sigma_K = \sup\limits_{N \in \mathcal{N}_K} d^* N$

Pour tout A de $\mathcal{A}_K$ on a $m(A) \leq \sigma\, m(\Omega)$

Démonstration.-

Soit $A \in \mathcal{A}_K$. Posons $B = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} T^{k_i}A$.

$1_B \in L^1$

Le théorème de Birkhoff montre que

$$\frac{1}{p}\sum_{0}^{p-1} 1_B(T^k\omega) \longrightarrow \bar{f}(\omega) \qquad m \text{ p.p.}$$

et

$$\int \bar{f}\, dm = \int f\, dm = \int 1_B dm = m(B) = n\, m(A)$$

puisque m est une mesure finie.

Soit $N_o(\omega) = \{k \,.\, | \, k \in \mathbb{N},\ T^k\omega \in A\}$.

Alors

$$N_o(\omega) + k_i = \{k \mid T^{k-k_i}\omega \in A\} = \{k \mid T^k\omega \in T^{k_i}A\}$$

$$0 \leq i \leq n-1$$

et $A \in \mathcal{A}_K \longrightarrow N_o(\omega) \in \mathcal{N}_K$.

En effet, si $k \in N_o + k_i$ et $k \in N_o + k_j$

on a $T^k\omega \in T^{k_i}A$ et $T^k\omega \in T^{k_j}A$

Puisque $A \in \mathcal{A}_K$, $T^{k_i}A \cap T^{k_j}A = \emptyset$ donc

$$(N_o(\omega) + k_i) \cap (N_o(\omega) + k_j) = \emptyset .$$

Donc $1_B(T^k\omega) = 1 \iff T^k\omega \in B = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i}A$

$$\iff k \in \bigcup_{i=0}^{n-1} N_o(\omega) + k_i$$

donc

$$\frac{1}{p}\sum_{0}^{p-1} 1_B(T^k\omega) = \frac{1}{p} \text{ card } \{[\bigcup_{i=0}^{n-1} (N_o(\omega)+k_i)] \cap [0,p-1]\ \}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\text{card}(N_o(\omega)+k_i)\cap[0,p-1]}{p.}$$

Mais

$$\text{card } [N \cap [0,p-1]] = \text{card } [N \cap [0,p-k-1]] + \text{card } [N \cap [p-k-1,p-1]]$$

$$= \text{card } [(N+k) \cap (k,p-1)] + \text{card } [N \cap (p-k-1,p-1]]$$

d'où

$$\frac{\text{card } [N \cap (0,p-1)]}{p} = \frac{\text{card } [(N+k) \cap (k,p-1)]}{p} + \frac{\text{card } [N \cap (p-k-1,p-1]}{p}$$

Comme card $[N \cap (p-k-1, p-1)] \leq k$

on a

$$\overline{\lim} \frac{\text{card } [N \cap (0,p-1)]}{p} = \overline{\lim} \frac{\text{card } [(N+k) \cap (k,p-1)]}{p}$$

donc

$$d^*(N) = d^*(N+k).$$

Comme $\frac{1}{p} \sum_{0}^{p-1} 1_B(T^k\omega)$ converge vers $\bar{f}(\omega)$ m.p.p. on déduit

$$\bar{f}(\omega) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d^*(N_o(\omega)+k_i) = n\, d^*(N_o(\omega))$$

$$\leq n\, \sigma \quad \text{p.p.}$$

d'où

$$n\, m\,(A) = \int \bar{f}\, d\, m \leq \int n\, \sigma\, d\, m = n\, \sigma\, m\,(\Omega).$$

4 - Lemme 2.-

Pour tout ε positif, il existe A élément de $\mathcal{A}_K$ tel que $m(A) > (\sigma-\varepsilon)m(\Omega)$.

Démonstration :

Soient N_o tel que $d^*(N_o) = \sigma_o > \sigma - \frac{\varepsilon}{2}$ et M un entier vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M + k_{n-1}} > 1 - \varepsilon_1 \\[2ex] \dfrac{\text{card } (N_o \cap [0,M-1])}{M} > \sigma_o - \varepsilon_2 \end{cases}$$

Appliquons le théorème de Rokhlin avec

$$K' = \{0,1,2, \ldots M + k_{n-1} - 1\}.$$

$\forall\, \varepsilon_3 > 0$, $\exists\, A_o \in \mathcal{A}_{K'}$, tel que

si $0 \leq i \leq M + k_{n-1} - 1$

$0 \leq j \leq M + k_{n-1} - 1$, $i \neq j$

on ait $T^i A_o \cap T^j A_o = \emptyset$ et

$$m(A_o \cup T A_o \cup \ldots \cup T^{M+k_n-1} A_o) > (1-\varepsilon_o)m(\Omega)$$

On a donc $(M+k_{n-1})\ m\ (A_o) > (1-\varepsilon_3)\ m\ (\Omega)$

soit $m(A_o') > \dfrac{1-\varepsilon_3}{M+k_{n-1}}\ m\ (\Omega)$.

Posons $A = \bigcup_{i \in N_o \cap [0,M-1]} T^i A_o$

Alors

$$B = \bigcup_{j \in K} T^j A \subset \bigcup_{i=0}^{M+k_{n-1}-1} T^i A_o$$

Donc B est une union disjointe de $T^j A$, et

$$m(A) = [\text{card}\ (N_o \cap (0,M-1))]\ m(A_o')$$

$$> M.\ (\sigma_o - \varepsilon_2)\ \frac{(1-\varepsilon_3)\ m\ (\Omega)}{M + k_{n-1}}$$

$$> (1-\varepsilon_1)\ (\sigma_o - \varepsilon_2)\ (1-\varepsilon_3)\ m\ (\Omega)$$

$$> (\sigma_o - \frac{\varepsilon}{2})\ m\ (\Omega) \geq (\sigma - \varepsilon)\ m\ (\Omega).$$

Le recouvrement maximum de Ω a donc pour mesure $n\ \sigma\ m\ (\Omega)$

où σ est la $\overline{\lim}_{N \in \mathcal{N}_K}\ d^*(N)$

Le lemme de Rokhlin n'est donc plus vrai lorsque l'on remplace l'ensemble $(0,1,2\ldots n-1)$ par un ensemble quelconque d'entiers : $(k_o,k_1\ldots k_{n-1})$

Par exemple, soit

$$K = K_{q,n} = (0,1,2,\ldots n,2n,3n,\ldots qn)$$

et $A \in B$, un sous-ensemble mesurable de Ω tel que

$\forall\ i \in K\ ,\ \forall\ j \in K,\ i \neq j \longrightarrow T^i A \cap T^j A = \emptyset$

Montrons que $\forall\ r\ ,\ \forall\ s\ ,\quad 0 \leq r \leq q\ n$

$0 \leq s \leq q\ n \qquad r \neq s$

implique $T^r A \cap T^s A = \emptyset$.

Soit $r = k\,n + i$

$s = k'n + j.$

avec

$0 \leq k' \leq k < q$

$k\,n + i \neq k'n + j$

$0 \leq i \leq n$

$0 \leq j \leq n.$

a) $i < j.$ $\quad T^{kn+i}\,A \cap T^{k'n+j}A = T^{k'n+i}(T^{(k-k')n}A \cap T^{(j-i)}A)$

Or $(k-k')\,n \in K$

$j-i \in K$

donc $T^{r}A \cap T^{s}A = \emptyset$.

b) $i > j.$ $\quad T^{k\,n+i}A \cap T^{k'\,n+j}A = T^{(k'-1)n+i}\left[T^{(k-k'+1)n}A \cap T^{n+j-i}A\right]$

Or $0 \leq n+j-i \leq n$ donc $n+j-i \in K$

et $(k-k'+1)n \in K$

On a encore $T^{r}A \cap T^{s}A = \emptyset$.

Il y a donc au moins $(qn+1)$ sous-ensembles " $T^{i}A$" disjoints dans Ω .

Comme $m(T^{i}A) = m(A)$ on en déduit

$$m(A) \leq \frac{1}{qn+1}\ m(\Omega)$$

donc

$$m\Big(\bigcup_{i \in K} T^{i}A\Big) \leq \frac{n+q}{qn+1}\ m(\Omega)$$

$$\leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{q}\right) m(\Omega)$$

$$< \varepsilon \qquad \text{si } n \text{ et } q \text{ sont suffisamment grands.}$$

On peut donc choisir K pour que le "recouvrement maximum" soit soit aussi petit que l'on veut.

6 - Proposition.-

Il existe un nombre σ_K, indépendant de (Ω,β,m,T), $0 < \sigma_K \leq \frac{1}{n}$ tel que :

1°) $\forall A \in \mathcal{A}_K : m(A) \leq \sigma_K m(\Omega)$

2°) $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{A}_K$ tel que

$m(A) > (\sigma_K - \varepsilon)\, m(\Omega)$

3°) On peut choisir K de telle sorte que $n\sigma_K$ soit aussi voisin de 0 que l'on veut.

7 - σ_K est un nombre rationnel.

7.1 Introduisons l'ensemble des " différences " :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_K = \{ k_i - k_j \mid i \in \{0,n-1\},\ j \in \{0,i-1\} \}$$

et notons $\mathcal{D}^*$ le complémentaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{N}$.

Soit $N \in \mathcal{N}_K$ avec $N = \{0,n_1,n_2,\ldots,n_p,\ldots\}$

Alors $n \in \mathcal{N}_K \Longleftrightarrow n_i - n_j \in \mathcal{D}^* \quad \forall i, \forall j.$

Sinon $n_i - n_j = k_\ell - k_m$

donc $n_i + k_m = n_j + k_\ell$

or $n_i + k_m \in N + k_m$ et $n_j + k_\ell \in N + k_\ell$

Comme $N + k_m$ et $N + k_\ell$ sont deux ensembles disjoints ceci est impossible.

La recherche d'une suite N de $\mathcal{N}_K$ équivaut donc à celle d'une suite

$$D = \{ n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, \ldots\ n_p - n_{p-1} \ldots \}$$

$$= \{ d_1, d_2, d_3, \ldots \}$$

avec $\sum_{h=0}^{j} d_{i+h} \in \mathcal{D}^* \quad \forall i, \forall j.$

7.2 Soit $\alpha_n(D)$ la moyenne de Césaro de $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ et $\alpha(D)$ la limite inférieure de $\alpha_n(D)$ pour n tendant vers l'infini :

$$\alpha_n(D) = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}$$

$$\alpha(D) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n(D)$$

Nous pouvons ne considérer que des " d_i " dans $\underline{\mathfrak{D}}^* = \mathfrak{D}^* \cap (0, k_{n-1})$ car si on augmente d_i, $\alpha_n(D)$ augmente.

Nous avons
$$d_1 = n_1$$
$$d_1 + d_2 = n_2$$
$$d_1 + d_2 + d_3 = n_3$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = n_n$$

donc $n = \text{card}\left[N \cap (0,1,2,\ldots \sum_1^n d_i)\right]$

Alors $\delta_m = \dfrac{\text{card}[N\cap(0,m)]}{m}$ avec $\sum_{i=1}^{n} d_i < m < \sum_{i=1}^{n+1} d_i$

Puisqu'il n'y a pas d'éléments de N entre $\sum_1^n d_i$ et $\sum_1^{n+1} d_i$, on a

$$\delta_m = \frac{\text{card}\left[N\cap(0, \sum_1^n d_i)\right]}{\sum_1^n d_i + \lambda}$$

avec $\lambda < d_{i+1} < k_{n-1}$ car $d_{i+1} \in \underline{\mathfrak{D}}^*$

d'où $\delta_m = \delta_{\Sigma d_i} \times \dfrac{\sum_1^n d_i}{\sum_1^n d_i + \lambda}$

Comme λ est borné, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_1^n d_i}{\sum_1^n d_i + \lambda} = 1$

donc $\overline{\lim}\ \delta_m = \overline{\lim}\ \delta_{\Sigma d_i}$

Soit $$d^*(N) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\text{card}\left[N \cap (0, \sum_1^n d_i)\right]}{\sum_{i=1}^n d_i}$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\sum_{i=1}^n d_i} = \frac{1}{\underline{\lim} \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}}$$

$$= \frac{1}{\underline{\lim}\ \alpha_n(L)} = \frac{1}{\alpha(D)}$$

7.3 Nous allons maintenant montrer qu'il existe une suite D_o, périodique, telle que $\alpha \cdot (D_o)$ soit minimum.

Pour cela, nous allons étudier le problème suivant :

Soient m points pondérés de masses respectives $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tels que seuls certains " couples " $a_i\ a_j$ soient " admissibles ". Nous dirons qu'une suite est " admissible si tous les couples consécutifs extraits le sont.

Alors, il existe parmi toutes les suites admissibles une suite $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, avec

$$\omega_i \in \{a_\ell\} \quad \ell = 1, \ldots m$$

dont la limite des moyennes de Césaro soit minimale et cette suite peut être choisie périodique.

7.4 Démonstration

Formons toutes les " boucles admissibles " c'est à dire toutes les suites finies permises, sans points doubles.

Nous avons donc

$b = b_1\ b_2 \ldots b_k\ (b_1 \ldots)$ que nous écrirons

$b = b_1\ b_2 \ldots b_k$ avec $b_i \in \{ a_\ell \}\ \ \ell \in (1 \ldots m)$

$$b_i \neq b_j \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Il y a au plus

$$m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + \frac{m!}{m}$$ telles boucles donc un nombre fini de boucles admissibles.

(Remarquons que pour les déterminer il suffit de considérer toutes les boucles débutant par a_1, puis toutes celles débutant par a_2 et ne contenant pas a_1, puis toutes celles débutant par a_3 et ne contenant ni a_1, ni a_2 ...).

Soit alors

$$\Omega = \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \dots \omega_n \dots,$$

avec $\omega_i \in \{a_i\}_{i \in (1 \dots m)}$, une suite admissible.

Posons $\Omega_n = \omega_1 \ \omega_2 \dots \omega_n$

$i_o = i(\Omega) = \inf \{ i \mid \omega_i \in (\omega_1 \dots \omega_{i-1}) \}$

$j_o = j(\Omega)$ défini par $\omega_{j(\Omega)} = \omega_{i(\Omega)}$

avec $j(\Omega) < i(\Omega)$.

$\lambda_o = \lambda(\Omega) = i(\Omega) - j(\Omega)$

$b_o = b(\Omega) = \omega_{j(\Omega)} \ \omega_{j(\Omega)+1} \dots \omega_{i(\Omega)-1}$.

et $\varphi(\Omega) = \omega_1 \ \omega_2 \dots \omega_{j(\Omega)-1} \ \omega_{i(\Omega)} \ \omega_{i(\Omega)+1} \dots \omega_n \dots$

Si $\alpha(\Omega_n)$ est la moyenne de Césaro de Ω_n nous avons :

$$\alpha(\Omega_n) = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{n} . \text{ Donc}$$

$$n\,\alpha(\Omega_n) = (\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_{j_o-1})+(\omega_{j_o}+\omega_{j_o+1}+\dots+\omega_{i_o-1})+(\omega_{i_o}+\dots\omega_n)$$

$$n\,\alpha(\Omega_n) = (\omega_{j_o}+\omega_{j_o+1}+\dots+\omega_{i_o-1}) + (\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_{j_o-1}+\omega_{i_o}+\dots+\omega_n)$$

$$= \lambda(\Omega)\ \alpha[b(\Omega_n)] + [n - \lambda(\Omega)]\ \alpha\ [\varphi(\Omega_n)]$$

$$= \lambda_o\ \alpha\ (b_o) + (n - \lambda_o)\ \alpha[\varphi(\Omega_n)]$$

Appliquons de nouveau " l'opérateur φ " à $\varphi(\Omega_n)$

Nous obtenons

$$[n - \lambda_o(\Omega_n)]\ \alpha\ [\varphi(\Omega_n)] = \lambda_1\ \alpha(b_1) - [n - \lambda_o - \lambda_1]\cdot\alpha\ (\varphi^2(\Omega_n))$$

d'où $m\,\alpha(\Omega_n) = \lambda_o\alpha(b_o)+\lambda_1\alpha(b_1)+(n-\lambda_o-\lambda_1)\alpha[\varphi^2(\Omega_n)]$

et, de proche en proche, :

$$n\alpha(\Omega_n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i\alpha\,(b_i) + \left[n - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i\right] \alpha\, [\varphi^k(\Omega_n)]$$

avec $K = n - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \leq m$ car comme il y a m valeurs distinctes de ω_i, dans tout ensemble de longueur supérieure à m il y a au moins une boucle.

D'où

$$n\,\alpha(\Omega_n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i\,\alpha(b_i) + K\,\alpha[\varphi^k(\Omega_n)]$$

$$\geq \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i\right)\alpha_o + K\,\alpha\,[\varphi^k(\Omega_n)]$$

où α_o représente l'infimum des moyennes de Césaro des boucles.

D'autre part, $\varphi^k(\Omega_n)$ comporte K termes et sa moyenne de Césaro est supérieure ou égale à $\inf a_i$ donc

$$n\,\alpha\,(\Omega_n) \geq \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i\right)\alpha_o + K \inf_i\,(a_i)$$

$$\alpha\,(\Omega_n) \geq \frac{n-K}{n}\,\alpha_o + \frac{K}{n} \inf_i a_i$$

$$\geq \alpha_o - \frac{K}{n}\,\alpha_o + \frac{K}{n} \inf_i a_i$$

et $\varliminf_{n\to\infty} \alpha\,(\Omega_n) \geq \alpha_o$.

Donc, il existe une suite " minimale " qui est périodique : c'est la suite $b_{\alpha_o}\, b_{\alpha_1}\, b_{\alpha_o}\,\ldots$

où b_{α_o} est une boucle vérifiant $\alpha\,(b_{\alpha_o}) = \alpha_o = \inf \alpha(b)$, l'infimum étant pris sur l'ensemble des boucles admissibles.

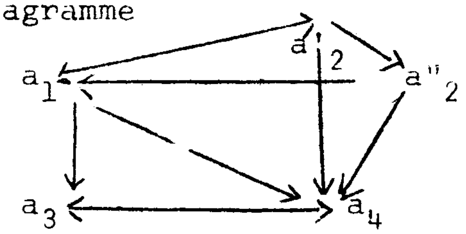
7.5 Remarque.-

Si une paire $a_i\ a_i$ est admissible sans que le triplet $a_i\ a_i\ a_i$ ne le soit, le raisonnement précédent s'applique encore en remplaçant le point a_i par deux points a'_i et a''_i, de même poids que a_i et en considérant les nouvelles paires admissibles oonvenables.

Exemple : supposons que l'on ait quatre points, les paires admissibles étant déterminées par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & a_2 \arrow[d] \\ a_3 \arrow[r, leftrightarrow] & a_4 \end{tikzcd}$$

si $a_2\ a_2$ est admissible sans que $a_2\ a_2\ a_2$ le soit, on obtiendra le nouveau diagramme



7.6 Prenons pour " a_n " tous les blocs admissibles B_ℓ tels que la somme des " d_i " d'un tel bloc soit supérieure ou égale à k_{n-1}, tous les blocs étant choisis de même mongueur. Ceci est toujours possible : il suffit de prendre pour longueur commune des blocs le nombre $k_{n-1} + 1$. En pratique, la longueur choisie pourra être très inférieure à ce nombre.
Alors si $B_1\ B_2$ et $B_2\ B_3$ sont admissibles, $B_1\ B_2\ B_3$ l'est car B_1 est sans influence sur B_3 puisqu'ils sont séparés par des termes dont la somme est supérieure à k_{n-1} donc appartient à $\mathfrak{D}^*$.

Les blocs étant choisis de même longueur, la moyenne de Césaro des d_i est la moyenne de Césaro des blocs positifs.

La suite minimale périodique trouvée dans le lemme nous fournit donc une suite minimale périodique d'éléments de D dont la limite des moyennes de Césaro est rationnelle.

Donc σ est rationnel.

7.7 Exemples.-

a) Reprenons l'exemple de 4.5 :

$$K = \{0, 1, 2, \ldots , n, 2n, 3n , \ldots qn\}$$

$$\mathfrak{D} = \{0, 1, 2, \ldots qn\}$$

donc $\mathfrak{D}^* = \{m \mid m \geq qn+1\}$ et la suite minimale périodique est trivialement :

$$D = (0, qn+1 , qn+1, \ldots)$$

d'où $$N = (0, qn+1, 2(qn+1) , 3(qn+1) \ldots)$$

et $$\sigma_K = \frac{1}{qn+1}$$

b) $K = \{0, 3, 7\}$

$$\mathfrak{D} = \{0, 3, 4, 7\}$$

$$\mathfrak{D}^* = \{1, 2, 5, 6, 8\}$$

$$b_o = 1, 1, 8$$

et $$\alpha (b_o) = \inf (a_i) = \frac{10}{3}$$

d'où $\sigma = \frac{3}{10}$

et $m (A \cup T^3A \cup T^7A) < \frac{9}{10} m (\Omega)$

si A, T^3A et T^7A sont disjoints.

8 - Exemple d'une suite infinie (k_i) , $(k_i < k_{i+1})$ telle que la mesure maximale de $\bigcup_{0}^{n-1} T^{k_i}A$ ait une limite inférieure nulle.

Nous allons montrer que la suite ci dessous répond à la question :

$0,1,2,3,\ldots n,2n,3n,\ldots,qn,$

$m_1,m_1+1,m_1+2,\ldots m_1+2n,m_1+4n,m_1+6n,\ldots m_1+2^2qn,$

$m_2,m_2+1,m_2+2,\ldots m_2+2^2n,m_2+2.2^2n,m_2+3.2^2n,\ldots m_2+2^4qn,$

$m_3,m_3+1,m_3+2,\ldots m_3+2^3n,m_3+2.2^3n,m_3+3.2^3n,\ldots m_3+2^6qn$

$m_4,m_4+1,m_4+2,\ldots m_4+2^4n,m_4+2.2^4n,m_4+3.2^4n,\ldots m_4+2^8qn$

. . . .

. . . .

$m_p,m_p+1,m_p+2,\ldots m_p+2^pn,m_p+2.2^pn,m_p+3.2^pn,\ldots m_p+2^pq.2^pn$

. . . .

avec $m_{p+1} > m_p + 2^{2p}qn.$

Considérons la sous suite finie K_p :

$K_p = \{0,1,\ldots m_p+ 2^{2p}qn\}.$

et soit σ_p correspondant.

L'ensemble des différences contient l'ensemble des différences $k_j - k_i$ pour $m_p < k_i < k_j < m_{p+1}$, c'est à dire l'ensemble des différences de l'ensemble

$0,1,2,\ldots 2^pn,2.2^pn,3.2^pn,\ldots,2^pq.2^pn$

Or, cet ensemble " différence " est l'ensemble de tous les nombres entiers compris entre 0 et $2^{2p}qn$.

La mesure maximale de A_p, sous ensemble associé à K_p, est donc inférieure à

$$\left(\frac{1}{2^{2p}qn + 1}\right) m\ (\Omega)$$

donc $\sigma_p < \dfrac{1}{2^{2^p qn+1}} < \dfrac{1}{2^{2^p qn}}$. Or si ρ_p est le nombre de termes de la suite K_p on a :

$$\begin{aligned}
\rho_p &= (n+1) + (q-1) \\
&\quad + (2n+1) + (2q-1) \\
&\quad + (2^2 n+1) + (2^2 q-1) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + (2^p n+1) + (2^p q-1) \\
&= n(1+2+2^2+ \dots + 2^p) + q\,(1+2+2^2+\dots+2^p) \\
&= (n+q)\,\frac{2^{p+1}-1}{2-1} = (n+q)\,(2^{p+1}-1)
\end{aligned}$$

donc

$$\rho_p\,\sigma_p < \frac{(n+q)\,(2^{p+1}-1)}{2^{2^p qn}} < \frac{1}{2^{p-1}}\;\frac{n+q}{n\,q} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

REFERENCE

ROKHLIN - Dobl. Akad. Nank. SSRR. - 60-1948 - p. 349-351
(en russe)