PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

G. HANSEL

Théorème de relèvement et mesures bivalentes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2
« Probabilités », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___2_1_0>

THEOREME de RELEVEMENT et MESURES BIVALENTES

G.Hansel, 47 rue du Chemin Vert, 92 Boulogne

Introduction

L'objet du présent travail est de donner une démonstration du théorème de relèvement dans le cas d'un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Elle diffère des démonstrations antérieures (cf.(1),(2),(3),(4),(6)),surtout en ce qu'elle simplifie le point le plus délicat de la preuve,à savoir l'éta-blissement de l'existence d'un relèvement $(\mathcal{A}_\infty, r_\infty)$ prolongeant une famille totalement ordonnée dénombrable $(\mathcal{A}_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de relèvements (cf.Proposition 2).
Notre démonstration repose sur la remarque simple que la donnée d'un relèvement r sur $\mathcal{A}$ est équivalente à la donnée d'une famille $(m_w)_{w\in\Omega}$ de mesures additives bivalentes sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\{0,1\}$, telle que

- pour tout $w\in\Omega$, et tout $A\in\mathcal{A}$ vérifiant $P(A)=0$, on ait $m_w(A) = 0$,
- pour tout $B\in\mathcal{A}$, si l'on pose $B^* = \{w\in\Omega / m_w(B) = 1\}$, on ait $P(B\Delta B^*) = 0$.

En effet, à une telle famille, on associe canoniquement un relèvement r par la formule $1_{r(A)}(w) = m_w(A)$. Cette remarque permet d'éviter la construction intermédiaire d'une "densité inférieure" ou d'un "relèvement linéaire" et les difficultés que cela entraine, soit pour la construction elle-même, soit pour le passage ultérieur à un relèvement. En particulier, l'utilisation du théorème de Krein-Milman ou l'introduction de la topologie associée aux densités sont ainsi évitées.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur Metivier pour les suggestions et remarques dont il a bien voulu me faire part.

Summary

A new proof of the "lifting theorem" for a complete probability space is given, which avoids the intermediate construction of a lower density or of a linear lifting.

Notations-Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité complet. On note

- $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω ;
- $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties de Ω de probabilité nulle;
- $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$;
- 1_A la fonction caractéristique d'une partie A de Ω.

Si deux fonctions numériques f et g définies sur Ω sont égales presque-partout, on écrit $f \equiv g$. De même, soient A et B deux parties de Ω ; si $1_A \equiv 1_B$, on écrit $A \equiv B$.

Soit une sous-tribu $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$; on suppose que $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}'$.

On désigne par $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')$ l'algèbre des fonctions numériques sur Ω, $\mathcal{A}'$-mesurables et essentiellement bornées. Soit une partie $A \in \mathcal{A}$; on désigne par $P^{\mathcal{A}'}(A)$ un représentant de la probabilité conditionnelle de A relativement à $\mathcal{A}'$. L'application $P^{\mathcal{A}'}(A)$ est $\mathcal{A}'$-mesurable, appartient à $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')$ et satisfait à la condition:

$$\forall B \in \mathcal{A}', \quad \int_B P^{\mathcal{A}'}(A)\,dP = P(A \cap B) \qquad (1)$$

Relèvements

On appelle relèvement de $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')$ une application $r : \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}') \longrightarrow \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')$ satisfaisant, pour tout $(f,g) \in [\mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')]^2$ et tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ aux conditions

- R1 $\quad r(f) \equiv f$
- R2 $\quad f \equiv g \Rightarrow r(f) = r(g)$
- R3 $\quad r(1) = 1$
- R4 $\quad f \geqslant 0 \Rightarrow r(f) \geqslant 0$
- R5 $\quad r(af + bg) = ar(f) + br(g)$
- R6 $\quad r(fg) = r(f).r(g)$

On appelle relèvement de $\mathcal{A}'$ une application $r' : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}'$ satisfaisant, pour tout couple $(A,B) \in \mathcal{A}'^2$ aux conditions

- R'1 $\quad r'(A) \equiv A$
- R'2 $\quad A \equiv B \Rightarrow r'(A) = r'(B)$
- R'3 $\quad r'(\Omega) = \Omega$ et $r'(\emptyset) = \emptyset$
- R'4 $\quad r'(A \cap B) = r'(A) \cap r'(B)$
- R'5 $\quad r'(A \cup B) = r'(A) \cup r'(B)$

Soit r un relèvement de $\mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{A}')$; on lui associe un relèvement r' de $\mathcal{A}'$ en posant, pour tout $A \in \mathcal{A}'$, $1_{r'(A)} = r(1_A)$. L'application $r \longrightarrow r'$ ainsi définie est une bijection de l'ensemble des relèvements de $\mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{A}')$ sur l'ensemble des relèvements de $\mathcal{A}'$ (cf. (6) p.34). Nous identifions désormais les relèvements de $\mathcal{A}'$ et de $\mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{A}')$ au moyen de cette bijection.

Remarques

1) Soit r un relèvement de $\mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{A}')$ et soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{A}')$ satisfaisant presque-partout aux inégalités $f(w) \leqslant g(w)$. Alors, pour tout $w \in \Omega$, on a $[r(f)](w) \leqslant [r(g)](w)$; en particulier, pour tout $w \in \Omega$, $0 \leqslant r[P^{\mathcal{A}'}(A)](w) \leqslant 1$.

2) Il résulte de la remarque précédente et de la relation (1) que, pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a:
$$r[P^{\mathcal{A}'}(A)] = 1 - r[P^{\mathcal{A}'}(\complement A)]$$

Proposition 1

Soit $\mathcal{A}'$ une sous-tribu propre de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{N}$ et soit $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Tout relèvement r' de $\mathcal{A}'$ se prolonge en un relèvement r de $\sigma(\mathcal{A}' \cup \{A\})$.

Démonstration

a) Des conditions R1 et R2 résulte que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $r'[P^{\mathcal{A}'}(A)]$ est un représentant de la probabilité conditionnelle de A par rapport à $\mathcal{A}'$ et est indépendant du représentant $P^{\mathcal{A}'}(A)$ choisi. Posons

$$A_0 = \{ w \in \Omega \,/\, r'[P^{\mathcal{A}'}(A)](w) = 0 \}$$
$$A_1 = \{ w \in \Omega \,/\, r'[P^{\mathcal{A}'}(A)](w) = 1 \}$$

Il résulte de la relation (1) que

$$A \cap A_0 \in \mathcal{N} \quad \text{et} \quad \complement A \cap A_1 \in \mathcal{N} \qquad (2)$$

Posons $\tilde{A} = (A \cup A_1) \cap \complement A_0$

De (2) il résulte que $\tilde{A} \equiv A$ (3)

b) Soient deux éléments B et B' de $\mathcal{A}'$ tels que $A \cap B \equiv A \cap B'$; montrons que l'on a la relation $\tilde{A} \cap r'(B) = \tilde{A} \cap r'(B')$.

On vérifie la suite d'implications

$$A \cap B \equiv A \cap B' \Longrightarrow r'[P^{\mathcal{A}'}(A \cap B)] = r'[P^{\mathcal{A}'}(A \cap B')] \Longrightarrow r'[1_B . P^{\mathcal{A}'}(A)] = r'[1_{B'} . P^{\mathcal{A}'}(A)]$$
$$\Longrightarrow r'(1_B) . r'[P^{\mathcal{A}'}(A)] = r'(1_{B'}) . r'[P^{\mathcal{A}'}(A)] \Longrightarrow r'(B) \cap \complement A_0 = r'(B') \cap \complement A_0 .$$

Le résultat voulu découle de cette égalité et de la définition de $\tilde{A}$.

c) Soient D et D' deux éléments de $\mathcal{A}'$ tels que $\complement A\cap D \equiv \complement A\cap D'$. On a la relation: $\complement\tilde{A}\cap r'(D) = \complement\tilde{A}\cap r'(D')$.

La démonstration est tout-à-fait semblable à celle de b)(on utilise la remarque 2) faite plus haut).

d) On vérifie que $\sigma(\mathcal{A}'\cup\{A\}) = \{(A\cap B)\cup(\complement A\cap D) \ / \ B\in\mathcal{A}', D\in\mathcal{A}'\}$

Soient alors E et E' deux éléments de $\sigma(\mathcal{A}'\cup\{A\})$; supposons que

$E = (A\cap B)\cup(\complement A\cap D)$ et $E' = (A\cap B')\cup(\complement A\cap D')$.

Si $E\equiv E'$, on a les relations $A\cap B\equiv A\cap B'$ et $\complement A\cap D\equiv\complement A\cap D'$.

Il résulte alors de b) et de c)

- que l'on définit bien une application $r: \sigma(\mathcal{A}'\cup\{A\})\longrightarrow\sigma(\mathcal{A}'\cup\{A\})$ en posant $r(E) = [\tilde{A}\cap r'(B)]\cup[\complement\tilde{A}\cap r'(D)]$,

- que l'application ainsi définie satisfait à la condition R'2 .

La condition R'1 est satisfaite d'après (3).

L'application r prolonge r' (en effet,si $B\in\mathcal{A}'$, on a $B = (A\cap B)\cup(\complement A\cap B)$ et on en déduit $r(B)=r'(B)$ par définition même de r).

Les conditions R'3,R'4,R'5 se vérifient aisément. L'application r est donc un relèvement de $\sigma(\mathcal{A}'\cup\{A\})$ prolongeant celui de $\mathcal{A}'$.

<u>Définition</u>

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de Ω. On dit qu'une mesure finiment additive m définie sur $\mathcal{A}$ est bivalente si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 et si $m(\Omega) = 1$.

<u>Lemme</u>

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité complet et soit $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de Ω tel que:
- $\mathcal{N}\subset\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$;
- $\mathcal{F}$ est stable pour la réunion finie;
- $\Omega\notin\mathcal{F}$

Alors il existe sur $\mathcal{A}$ une mesure finiment additive bivalente m telle que,

-pour tout $F\in\tilde{\mathcal{F}}$, $m(F) = 0$,

-pour tout couple $(A,B)\in\mathcal{A}^2$ et vérifiant $A\equiv B$, on a $m(A) = m(B)$.

Démonstration

Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal propre de $\mathcal{A}$ qui contient $\mathcal{F}$. On définit l'application m en posant $m(A) = 0$ si $A \in \mathcal{F}$ et $m(A) = 1$ si $A \notin \mathcal{F}$. m est ainsi une mesure finiment additive bivalente sur $\mathcal{A}$. D'autre part, pour tout $N \in \mathcal{N}$, $m(N) = 0$; il en résulte que $A \equiv B \Rightarrow m(A)=m(B)$.

Notations

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité complet. On notera $\mathcal{H}$ l'ensemble des couples $(\mathcal{A}', r')$, où $\mathcal{A}'$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{N}$ et r' un relèvement de $\mathcal{A}'$. On suppose que $\mathcal{H}$ est muni de la relation d'ordre $\leqslant$ définie par $(\mathcal{A}', r') \leqslant (\mathcal{A}'', r'') \Longleftrightarrow \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ et r" coïncide avec r' sur $\mathcal{A}'$.

Proposition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité complet et soit $(\mathcal{A}_n, r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n)$. Il existe un relèvement r_∞ de $\mathcal{A}_\infty$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{A}_n, r_n) \leqslant (\mathcal{A}_\infty, r_\infty)$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{A}_\infty$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n^A = r_n\left[P^{\mathcal{A}_n}(A)\right]$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet et posons $f_A = \lim_{\mathcal{U}} f_n^A$ (la limite existe car $0 \leqslant f_n^A \leqslant 1$, cf. Remarque 1)).

Pour tout $w \in \Omega$, on pose $\mathcal{F}_0(w) = \{A \in \mathcal{A}_\infty / f_A(w) = 0\}$

a) Montrons que, pour tout $w \in \Omega$, l'ensemble $\mathcal{F}_0(w)$ satisfait aux trois conditions du lemme.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{F}_0(w)$. On vérifie

$$f_{A \cup B}(w) = \lim_{\mathcal{U}}\left[r_n\left[P^{\mathcal{A}_n}(A \cup B\right](w)\right] \leqslant \lim_{\mathcal{U}}\left[r_n\left[P^{\mathcal{A}_n}(A)\right](w) + r_n\left[P^{\mathcal{A}_n}(B)\right](w)\right] = 0$$

Par conséquent $A \cup B \in \mathcal{F}_0(w)$; $\mathcal{F}_0(w)$ est stable pour la réunion finie. Les autres conditions se vérifient immédiatement.

b) D'après le lemme, il existe, pour tout $w \in \Omega$, une mesure finiment additive bivalente $m_w : \mathcal{A}_\infty \longrightarrow \{0,1\}$ qui, pour tout $A \in \mathcal{F}_0(w)$, vérifie $m_w(A) = 0$. De plus, si $A \equiv B$, $m_w(A) = m_w(B)$.

Définissons l'application $r: \mathcal{A}_\infty \to \mathcal{P}(\Omega)$ par $r(A) = \{w \in \Omega / m_w(A) = 1\}$

c) Soit $A \in \mathcal{A}_\infty$. Montrons que l'on a les implications

$f_A(w) = 1 \Longrightarrow w \in r(A)$ et $f_A(w) = 0 \Longrightarrow w \notin r(A)$. En effet

$f_A(w) = 0 \Longrightarrow A \in \widetilde{\mathcal{F}}_0(w) \Longrightarrow m_w(A) = 0 \Longrightarrow w \notin r(A)$;

$f_A(w) = 1 \Longrightarrow f_{\complement A}(w) = 0 \Longrightarrow \complement A \in \mathcal{F}_0(w) \Longrightarrow m_w(A) = 1 \Longrightarrow w \in r(A)$.

d) Pour tout $A \in \mathcal{A}_\infty$, $r(A) \equiv A$ et (par conséquent) $r(A) \in \mathcal{A}_\infty$.

En effet d'après le théorème des martingales (5), $f_A \equiv 1_A$. La conclusion résulte alors de c).

e) Soit $r_\infty : \mathcal{A}_\infty \to \mathcal{A}_\infty$ l'application définie (grâce à d)) par $r_\infty(A) = r(A)$.

La condition R'1 est satisfaite d'après d). La condition R'2 est satisfaite car, si $A \equiv B$, on a, pour tout $w \in \Omega$, $m_w(A) = m_w(B)$. Les conditions R'3, R'4, R'5 résultent aisément de ce que, pour tout $w \in \Omega$, m_w est une mesure bivalente (ici prend son sens la remarque faite en Introduction).

r_∞ est donc un relèvement de $\mathcal{A}_\infty$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{A}_n, r_n) \leqslant (\mathcal{A}_\infty, r_\infty)$.

En effet, soit $A \in \mathcal{A}_n$. Pour tout $m \geqslant n$, $P^{\mathcal{A}_m}(A) \equiv 1_A$ et par conséquent

$f_A = r_m(1_A) = 1_{r_m(A)}$. La conclusion résulte alors de c).

<u>Théorème</u>

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité complet. Il existe un relèvement r de $\mathcal{A}$.

<u>Démonstration</u>

a) $\mathcal{H}$ est non vide: $\sigma(\mathcal{N})$ est une tribu contenant $\mathcal{N}$ sur laquelle se définit un relèvement évident.

b) Montrons que $\mathcal{H}$ est un ensemble ordonné inductif.

Soit I un ensemble totalement ordonné et $i \longrightarrow (\mathcal{A}_i, r_i)$ une application strictement croissante de I dans $\mathcal{H}$.

<u>1^er^ cas</u> I n'admet pas de suite cofinale. Il en résulte que $\sigma(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

On peut définir $r : \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \to \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ par $r(A) = r_i(A)$ si $A \in \mathcal{A}_i$; on vérifie que r est un relèvement de $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ et que pour tout $i \in I$, $(\mathcal{A}_i, r_i) \leqslant (\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i, r)$.

<u>2^ème^ cas</u> I admet une suite cofinale $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on peut choisir cette suite croissante). On a donc $\sigma(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i) = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{i_n})$.

Il résulte alors de la proposition 2 que l'on peut définir sur $\sigma(\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i)$ un relèvement r tel que, pour tout $i \in I$, $(\mathcal{A}_i, r_i) \leq (\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i, r)$.

c) $\mathcal{H}$,étant un ensemble ordonné inductif, possède un élément maximal $(\mathcal{A}', r')$. Il résulte de la proposition 1 que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

Références

(1) MAHARAM On a theorem of Von Neumann;Proc.Am.Math.Soc.9,987-994(1958)

(2) IONESCU-TULCEA On the lifting property I.J.Math.Annal.Appl.3,537-546(1961)

(3) SION A proof of the lifting theorem.Departement of Mathematics;the University of British Columbia (1970)

(4) PELLAUMAIL Une preuve de l'existence d'un relèvement.Application:un théorème de Radon-Nikodym faible.Publications des Séminaires de Mathématiques; Université de Rennes (1970-1971)

(5) MEYER Probabilités et Potentiel,Hermann 1966,p.118 ou BILLINGSLEY Ergodic Theory and Information,John Wiley and Sons 1965,p.116

(6) IONESCU-TULCEA Topics in the theory of lifting,Springer-Verlag (1969)