

A. BRUNEL

**Théorème ergodique ponctuel pour les semi-groupes
commutatifs finiment engendrés**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fasci-
cule 2*

« Probabilités », , p. 83-98

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__2_83_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informa-
tiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utili-
sation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou
impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie
ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEOREME ERGODIQUE PONCTUEL POUR LES SEMI-GROUPES

COMMUTATIFS FINIMENT ENGENDRES

par

A. BRUNEL

Laboratoire de Probabilités
Université de RENNES
E.R.A. du C.N.R.S. n° 250

0 - INTRODUCTION. -

Soient T_1, T_2, \dots, T_d des contractions d'un espace $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ où (X, \mathcal{F}, μ) est un espace mesuré σ - fini. Ces contractions non nécessairement positives, commutent deux à deux et vérifient en outre la condition :

$$(1) \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad 1 \leq j \leq d \quad \forall \varphi \in L^1 \cap L^\infty \quad \|T_j \varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty.$$

On se propose dans cet article de prouver le théorème ergodique :

Théorème 0-1 :

Pour tout $f \in L^1$, il existe $\tilde{f} \in L^1$ tel que

$$(1) \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^d T_j^k \right) f = \tilde{f} \quad \mu \text{ p.p.}$$

$$(2) \quad \int |\tilde{f}| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu.$$

$$(3) \quad \text{pour tout } j = 1, 2, \dots, d \text{ on a } T_j \tilde{f} = \tilde{f}, \quad T_j^* (\tilde{f}) = \tilde{f}$$

T_j^* désignant la transposée de T_j et \bar{h} la conjuguée complexe de h .

Suivant des méthodes standard en théorie ergodique, on peut déduire aisément de ce théorème un résultat établi par Dunford et Schwartz en 1956 [3] relatif à un semi - groupe à d paramètres de contractions $T_{(s_1, s_2, \dots, s_d)}$ d'un espace L^1 qui possèdent la propriété (1).

On commence par établir le théorème pour des contractions positives et l'on utilise ensuite le module linéaire de Chacon - Krengel [2] en tenant compte de résultats récents d'Akoglu et Brunel [1] .

La méthode suivie dans le cas des opérateurs positifs est basée sur la proposition suivante :

Proposition 0-1 :

Il existe une série à termes positifs :

$$(2) \quad S = \sum_{(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d} a_{j_1 \dots j_d} T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}$$

$$\text{et} \quad \sum_{(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d} a_{j_1 \dots j_d} = 1$$

et il existe un nombre α dépendant que de d , $\alpha > 0$,

tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \quad \frac{1}{n^d} \sum_{\substack{0 \leq j_1 < n \\ \dots \\ 0 \leq j_d < n}} T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d} \leq \alpha \frac{1}{n^d} \sum_{0 \leq j < n} s_j$$

en désignant par n_d la partie entière de $n^{2^{-m}}$ si $2^{m-1} < d \leq 2^m$.

Comme dans le travail, cité plus haut, de Dunford et Schwartz, cette proposition se démontre par récurrence sur d en partant du cas particulier $d = 2$ pour lequel S est la contraction :

$$(3) \quad S = (I - \sqrt{I - T_1}) (I - \sqrt{I - T_2}) ,$$

l'expression (2) s'obtenant en développant (3) suivant les puissances de T_1 et T_2 .

Nous commencerons par établir le cas $d = 1$ comme conséquence du théorème de Chacon et Ornstein et nous identifierons la limite.

$$I - \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j f$$

On sait que pour $T \geq 0$, $T\varphi$ peut être défini pour φ mesurable et positive. Alors, la condition (1) s'écrit tout simplement

$$T 1 \leq 1.$$

Soit T^* la transposée de T , T^* étant une contraction positive de \mathbb{L}^∞ .

Lemme 1-1 :

Si $T 1 \leq 1$, T et T^* ont la même décomposition de Hopf, $X = C \cup D$ et la sous tribu \mathcal{J} des invariants sur C est la même pour T et T^* .

D est l'union des $A \in \mathcal{F}$ tels que $\sum_n T^{*n} 1_A \in \mathbb{L}^\infty$, or ceci entraîne $A \subset D^*$. On a donc $D \subset D^*$ et l'on démontre de même l'inclusion opposée. En outre, ceci prouve que $T 1_D \leq 1_D$ d'où l'on déduit $T 1_C = T^* 1_C = 1_0$.

Ensuite, si $A \in \mathcal{J}$, relativement à T , soit $T 1_A = 1_A \pmod{\mu}$, on a aussi $T 1_{C-A} = 1_{C-A} \pmod{\mu}$, donc $1_A T 1_{C-A} = 0$. En intégrant, on obtient

$$0 = \int 1_A (T 1_{C-A}) d\mu = \int (T^* 1_A) 1_{C-A} d\mu,$$

c'est à dire $T^* 1_A \leq 1_A \pmod{\mu}$, donc $T^* 1_A = 1_A \pmod{\mu}$.

Soit v , $0 < v \leq 1$, $v \in \mathbb{L}^1$. La fonction $\tilde{v} = \lim_n \frac{1}{n} (\sum_{j=0}^{n-1} T^j v)$ est comprise entre 0 et 1 et vérifie l'inégalité $\tilde{v} \geq T \tilde{v}$. En outre, $\tilde{v} = 0$ sur D , donc $\tilde{v} = T \tilde{v} = T^* \tilde{v}$. Posons $B = \{\tilde{v} > 0\}$. $B \in \mathcal{J}$ et $\tilde{v} \in \mathbb{L}^1$ par le lemme de Fatou. La mesure finie $\tilde{v} \cdot \mu$ est portée par B et est invariante relativement à T . Le lemme ergodique maximal montre alors que

$\tilde{v} = \lim_n \frac{1}{n} (\sum_{j=0}^{n-1} T^j v)$ car pour tout autre $A \in \mathcal{J}$, disjoint de B on a $\mu(A) = 0$ ou $+\infty$. Il est aussi clair que $\mu(\tilde{v}) \leq \mu(v)$.

Si maintenant f est quelconque dans \mathbb{L}^1 , le théorème de Chacon - Ornstein appliqué à f et v implique la

Proposition I-1 :

Si $f \in \mathcal{L}^1$, $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j f = \tilde{f}$ existe μ p.p. et au sens de \mathcal{L}^1 .

\tilde{f} est nulle hors de B et, sur B,

$$\tilde{f} = \tilde{\nu} E \left(\frac{f}{\tilde{\nu}} \mid \mathcal{I} \cap B \right),$$

l'espérance conditionnelle étant prise relativement à la mesure finie $\tilde{\nu}$.

$$\text{On a donc aussi } \tilde{f} = T \tilde{f} = T^* \tilde{f}, \text{ puis } \int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu.$$

II - Quelques propriétés des coefficients des développements de Taylor des fonctions $\xi^n(x)$ où $\xi(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.

Ecrivons les développements :

$$\xi^n(x) = \sum_{p \geq 0} \alpha_p^n x^p, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} \xi^n(x) = \sum_{p \geq 0} \beta_p^n x^p.$$

Clairement, les α_p^n et β_p^n sont > 0 pour $p \geq n$, 0 pour $p < n$. De plus, $\sum_{p \geq 0} \alpha_p^n = 1$.

En dérivant $\xi^n(x)$ on déduit les relations

$$\alpha_p^n = \frac{n}{2p} \beta_{p-1}^{n-1}. \text{ Un simple calcul de résidus donne :}$$

$$p \geq n \quad \beta_p^n = 2^{n-2p} \binom{2p-n}{p}.$$

Lemme II-1 :

Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que

$$n^2 \leq p \quad \longrightarrow \quad \alpha_p^n \geq c n p^{-\frac{3}{2}}$$

Il revient au même de prouver l'existence de $\gamma > 0$ tel que, si $p, n \rightarrow \infty$ avec $n^2 \leq p$, l'on ait $\liminf 2^{n-2p} \binom{2p-n}{p} > \gamma$ ce qui se fait simplement en utilisant la formule de Stirling. Pour tout réel $a \geq 0$, nous noterons $[a]$ la partie entière de a .

Lemme II-2 :

Il existe une constante absolue $C' > 0$, telle que pour tous entiers p, q, n et en posant $n' = [\sqrt{n}] + 1$,

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n'} \sum_{j < n'} \alpha_p^j \alpha_q^j \geq \frac{c'}{n^2} \quad \text{si } p, q < n$$

Supposons $q \leq p$. On peut écrire les inégalités :

$$\sum_{j < n'} \alpha_p^j \alpha_q^j \geq \frac{c^2}{(pq)^{3/2}} \sum_{j=0}^{[\sqrt{q}]} j^2 \geq \frac{c'}{p^{3/2}} \geq \frac{c'}{n'^3} \quad \blacksquare$$

III - Démonstration de la proposition 0-1.-

Soient T_1 et T_2 des contractions qui commutent.

Posons

$$S = \xi(T_1) \xi(T_2) = \sum_{(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^1 T_1^{j_1} T_2^{j_2}.$$

S est aussi une contraction.

Lemme III-1 :

Il existe une constante absolue $\delta > 0$ telle que

si T_1 et T_2 sont des opérateurs positifs qui commutent, on a :

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq j_1, j_2 < n} T_1^{j_1} T_2^{j_2} \leq \frac{\delta}{n'} \sum_{0 \leq j < n'} S^j$$

$$\frac{1}{n'} \sum_{j < n'} S^j = \sum_{(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2} \left(\frac{1}{n'} \sum_{j < n'} \alpha_{j_1}^j \alpha_{j_2}^j \right) T_1^{j_1} T_2^{j_2} \geq \frac{c'}{n^2} \sum_{j_1, j_2 < n} T_1^{j_1} T_2^{j_2}$$

en appliquant le lemme II-2 et il suffit de poser $\frac{1}{c'} = \delta$. \blacksquare

Si l'on a ensuite 4 contractions T_j ; $j = 1, 2, 3, 4$, positives et commutant deux à deux, on pose successivement

$$S_1 = \xi(T_1) \xi(T_2) \quad , \quad S_2 = \xi(T_3) \xi(T_4)$$

et $S = \xi(S_1) \xi(S_2)$. Posons $n'' = (n')'$. On peut écrire les inégalités :

$$\frac{1}{n^4} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4 < n} T_1^{j_1} T_2^{j_2} T_3^{j_3} T_4^{j_4} \leq \frac{\delta}{n'^2} \sum_{k_1, k_2 < n'} S_1^{k_1} S_2^{k_2} \leq \frac{\delta}{n''} \sum_{i < n''}$$

Par récurrence sur m , on démontre ainsi la proposition 0-1 pour $d = 2^m$. Si l'on remplace alors plusieurs des T_j par l'opérateur identité I , on obtient le cas général où S a bien la forme indiquée. ■

Nous aurons besoin d'une autre inégalité entre opérateurs dans le cas où les T_j ne sont plus nécessairement positifs, mais sont des contractions sur l'espace \mathbb{L}^1 de fonctions à valeurs complexes, satisfaisant toujours à la condition (1).

Proposition III-1 :

Il existe une constante $\chi > 0$ et une contraction positive U telle que $U 1 \leq 1$, vérifiant pour tout entier $n > 0$, et toute fonction $f \in \mathbb{L}^1$, l'inégalité

$$\frac{1}{n^d} \left| \sum_{j_1, \dots, j_d < n} T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d} f \right| \leq \frac{1}{n^d} \left(\sum_{j_1, \dots, j_d < n} |T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d} (|f|) \right) \leq \chi \sum_{j < n_d} U^j (|f|)$$

En fait, avec les notations de la proposition 0-1, il suffira de prendre :

$$U = \sum_{(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d} a_{j_1 \dots j_d} |T_1|^{j_1} \dots |T_d|^{j_d}$$

avec, pour chaque i , $|T_i|$ = module linéaire de T_i au sens de Chacon - Krengel (ou Dunford et Schwartz). Manifestement U est une contraction positive et $U 1 \leq 1$ puisque $|T_i|(1) \leq 1$.

La seule difficulté est que les T_i commutent deux à deux, mais il n'est plus sûr que les $|T_i|$ jouissent de la même propriété. Dans le cas positif, l'inégalité se vérifie monôme par monôme de la forme $c T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}$. Il est alors aisé d'en déduire l'inégalité de la proposition III-1, en écrivant de la même manière les monômes de U^j et ceux de S^j . ■

IV - Commençons par prouver le théorème 0-1 pour $d = 1$, T n'étant pas nécessairement positif. Nous utiliserons un résultat de Akcoglu et Brunel [1] suivant lequel il existe une décomposition de la partie conservative C de $|T|$: $C = \Gamma \cup \Delta$ et une fonction complexe s de module 1 sur Γ ayant les propriétés suivantes :

- 1) $(1 - T) \mathbb{L}^1(\Delta)$ est dense dans $\mathbb{L}^1(\Delta)$ pour la topologie induite par \mathbb{L}^1 .
- 2) pour tout $g \in \mathbb{L}^1(\Gamma)$, $T g = \bar{s} |T| (sg)$ (\bar{s} = conjugué de s)
- 3) Γ et Δ appartiennent à la tribu \mathcal{T} des invariants de $|T|$.

En effet, les résultats obtenus dans I montrent que si l'on pose

$$f = g + h \quad , \quad g = f \mathbb{1}_\Gamma \quad ,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j < n} T^j h \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{j < n} T^j g = \bar{s} \left(\frac{1}{n} \sum_{j < n} |T|^j (sg) \right) \rightarrow \bar{s}(s\tilde{g})$$

avec $s\tilde{g} = |T| (s\tilde{g}) = |T|^* (s\tilde{g})$ et $\int_B s\tilde{g} d\mu = \int sg d\mu$.

Or, dans [1] il est démontré que :

$$T^* h = s |T|^* (\bar{s}h) \quad \text{et} \quad |T|^* = |T|^*$$

Ceci entraîne, en posant $\tilde{f} = \bar{s} (s\tilde{g})$

$$T^* (\tilde{f}) = s |T|^* [s\tilde{g}] = s |T|^* (s\tilde{g}) = s (s\tilde{g}) = \tilde{f}.$$

La relation $T \tilde{f} = \tilde{f}$ est évidente. On a aussi $\int |\tilde{f}| d\mu \leq \int |f| d\mu$.
 Les conditions 1), 2) et 3) du théorème 0-1 sont ainsi satisfaites pour $d = 1$.

Une conséquence de ce théorème ergodique est que, pour tout $f \in \mathbb{L}^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une décomposition de f sous la forme :

$$(4) \quad f = \tilde{f} + (I - T) f' + \varphi$$

avec $f' \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^\infty$ et $\varphi \in \mathbb{L}^1$, $\|\varphi\|_1 < \varepsilon$.

En effet, la décomposition (4) existe évidemment avec $f' \in \mathbb{L}^1$.
 Puis, par troncation, on écrit $f' = f'' + \psi$ avec $f'' \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^\infty$ et $\|\psi\|_1$ suffisamment petit.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème fondamental par récurrence sur d . Supposons-le vrai pour $d - 1$ et posons pour simplifier :

$$A_n = \frac{1}{n^d} \sum_{j_1, \dots, j_d < n} T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}, \quad B_n = \frac{1}{n^{d-1}} \sum_{j_2, \dots, j_d < n} T_2^{j_2} \dots T_d^{j_d}$$

On a alors, en écrivant $f = \tilde{f}_1 + (I - T_1) f'_1 + \varphi_1$, c'est à dire la décomposition (4) relativement à f et T_1 ,

$$(5) \quad A_n f = B_n \tilde{f}_1 + \frac{I - T_1^n}{n} B_n f'_1 + A_n \varphi_1.$$

Mais, $B_n \tilde{f}_1 \rightarrow \tilde{f}$ avec $\tilde{f} = T_j \tilde{f}$, $\tilde{f} = T_j^* \tilde{f}$ pour $2 \leq j \leq d$
 et $\int |\tilde{f}| d\mu \leq \int |\tilde{f}_1| d\mu \leq \int |f| d\mu$.

Le deuxième terme de (5) tend uniformément vers 0, donc

$$\overline{\lim}_n |A_n f - \tilde{f}| \leq \overline{\lim}_n |A_n \varphi|.$$

En appliquant la proposition III-1, on majore le second membre par $\chi \lim_n (\frac{1}{n} \sum_{j < n} U^j(|\varphi|)) = \chi \psi$ avec $\|\psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 < \varepsilon$.

On a donc :

$$\int \overline{\lim}_n |A_n f - \tilde{f}| d\mu \leq \chi \epsilon.$$

On a bien prouvé que $\tilde{f} = \lim A_n f$ μ - p.p..

D'autre part, $B_n \tilde{f}_1 = B_n T_1 \tilde{f}_1^n = T_1 B_n \tilde{f}_1 \rightarrow T_1 \tilde{f} = \tilde{f}$

Cette dernière égalité montre que $\text{supp } \tilde{f} \subset \Gamma_1$ (décomposition de Akcoglu - Brunel relative à T_1) et l'on obtient

$$T_1^* (\tilde{f}) = s_1 |T_1|^* (s_1 \tilde{f}) = s_1 |T_1|^* (s_1 \tilde{f}) = s_1 \bar{s}_1 \tilde{f} = \tilde{f}. \blacksquare$$

V - Pour préciser le rôle des opérateurs barycentres S nous allons plus généralement considérer un opérateur V de la forme

$$V = \sum_{(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d} b_{j_1 \dots j_d} T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d},$$

combinaison convexe infinie des monômes $T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}$, et montrer que s'il y a suffisamment de coefficients non nuls, le théorème ergodique appliqué à V donne la même limite que le théorème O-L. Pour parvenir à cela, nous commençons par un théorème général sur les points fixes d'une famille commutative de contractions d'un espace de Banach.

Théorème V-1 :

Soit E un espace de Banach, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille dénombrable de contractions de E , commutant deux à deux,

$U = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha U_\alpha$ un barycentre des U_α avec des coefficients $c_\alpha > 0$ Alors

$$E \ni x = Ux \iff \forall \alpha \in A \quad U_\alpha x = x$$

Il suffit de montrer le résultat pour deux contractions U_1 et U_2 et un barycentre $U = c_1 U_1 + c_2 U_2$.

Si V est une contraction, posons $E(V) = \frac{1}{e} \exp(V) =$

$$\frac{1}{e} \sum_{j \geq 0} \frac{V^j}{j!}.$$

On a :

$$(E(V))^n = \frac{1}{e^n} \exp(nV) = \sum_{j \geq 0} \frac{n^j}{e^{n_j!}} V^j = \sum_{j \geq 0} a_j^n V^j \quad \text{avec } a_j^n = \frac{n^j}{e^{n_j!}},$$

et $(I - V) (E(V))^n = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j^n - a_{j-1}^n) V^j$ en posant $a_{-1}^n = 0$.

Ceci donne :

$$\| (I - V) (E(V))^n \| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j^n - a_{j-1}^n| = 2 a_n^n,$$

donc $\lim_n \| (I - V) (E(V))^n \| = 0$

L'égalité $\frac{1}{C_1} U = U_1 + \frac{C_2}{C_1} U_2$ donne :

$$e^{-\frac{1}{C_1} U} \exp\left(\frac{1}{C_1} U\right) = E(U_1) e^{-\frac{C_2}{C_1} U_2} \exp\left(\frac{C_2}{C_1} U_2\right) = E(U_1) \cdot V_2,$$

Les trois termes étant des contractions de \mathbb{E} . Si $U X = X$, on a aussi, pour tout n ,

$$X = (E(U_1))^n V_2^n X \quad \text{et,}$$

$$\| X - U_1 X \| \leq \| (I - U_1) (E(U_1))^n \| \cdot \| X \|, \text{ donc}$$

$$X = U_1 X.$$

L'autre implication du théorème est évidente. ■

Revenons à l'opérateur V introduit au début de ce paragraphe.

Le théorème V-1 montre alors que :

$$\mathbb{L}^1 \ni f = V f \iff \begin{cases} f = T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d} f \text{ pour les } (j_1, \dots, j_d) \\ \text{tels que } b_{j_1 \dots j_d} \neq 0. \end{cases}$$

Si, pour chaque entier k , $1 \leq k \leq d$, il existe (j_1, \dots, j_d) tels que $b_{j_1 \dots j_k \dots j_d}$ et $b_{j_1, \dots, j_k+1, \dots, j_d}$ sont non nuls, il est alors clair que

$T_k f = f$ et l'on obtient l'équivalence :

$$(6) \quad \mathbb{L}^1 \ni f = V f \iff \forall k = 1, 2, \dots, d \quad T_k f = f$$

En particulier S possède la propriété (6).

Proposition V-1 :

Si une contraction barycentre V possède la propriété (6), pour tout $f \in \mathbb{L}^1$, on a :

$$\lim_n A_n(f) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j < n} V^j f \quad \mu - p.p.$$

Relativement à V, f se décompose en

$$f \in \mathbb{L}^1 \quad f = g + h \quad , \quad \overline{g} = \overline{Vg} \quad \text{et} \quad h \in \overline{(I - V)\mathbb{L}^1}$$

Mais l'orthogonal de $(I - V)\mathbb{L}^1$ dans \mathbb{L}^∞ est le noyau de $I - V^*$.

Le théorème V-1 montre que :

$$\mathbb{L}^\infty \ni \varphi = V^* \varphi \iff \varphi = T_k^* \varphi \quad k = 1, 2, \dots, d., \text{ donc que}$$

$$\text{Ker}(I - V^*) = \bigcap_{1 \leq k \leq d} \text{Ker}(I - T_k^*) ,$$

qui implique à son tour

$$(I - V)\mathbb{L}^1 = \sum_{1 \leq k \leq d} (I - T_k)\mathbb{L}^1 .$$

Cette dernière propriété entraîne la limite

$$\lim_n A_n h = 0 \quad \mu - p.p.,$$

et comme $A_n g = g$, on a aussi $\lim_n A_n f = g$. ■

VI - Donnons brièvement pour terminer la démonstration du théorème de Dunford - Schwartz mentionné dans l'introduction.

Nous nous bornerons à considérer un semi - groupe $(T_x)_{x \in \mathbb{R}_+^2}$ de contractions de \mathbb{L}^1 vérifiant la condition (1).

Pour $t > 0$, on pose $B_t = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq t, 0 \leq x_2 \leq t\}$

et l'on considère les moyennes ergodiques :

$$f \in \mathbb{L}^1 \quad M_t f = \frac{1}{t^2} \int_{B_t} (T_x f) d\lambda(x) \quad \text{où} \quad d(x) = dx_1 dx_2$$

$$\text{Pour } (j, k) \in \mathbb{N}^2, \text{ posons } M_{j,k} = \int_{\substack{j \leq x_1 < j+1 \\ k \leq x_2 < k+1}} T_x d\lambda(x) = T_1^j T_2^k M_{0,0} = 1$$

$$T_1 = T_{(1,0)} \text{ et } T_2 = T_{(0,1)} . \text{ On a alors } M_n = A_n M_{0,0} = M_{0,0} A_n$$

pour n entier et avec les notations employées dans le cas discret.

(1) Le semi-groupe est supposé être fortement mesurable.

On déduit de là que si $g \in \mathbb{L}^1 \cap L^\infty$, $(M_t - M_{[t]})g \rightarrow 0$ (dans \mathbb{L}^∞). Etablissons maintenant le

Lemme VI-1 :

Si $f \in \mathbb{L}^1$ $\int \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |M_t f| d\mu \leq \delta \|f\|_1$
(δ utilisé dans le lemme III-1)

$$|M_t f| \leq \frac{1}{t^2} \int_{B_t} |T_x(|f|)| d\lambda(x) \leq \frac{1}{t^2} \int_{B_{n+1}} |T_x(|f|)| d\lambda(x)$$

avec $n = [t]$. Et ensuite

$$|M_t f| \leq \frac{1}{t^2} \sum_{j_1, j_2 < n+1} |T_1^{j_1} T_2^{j_2}| |M_{0,0}(|f|)|.$$

En appliquant la proposition III-1 et tenant compte du fait que $|M_{0,0}|$ est aussi une contraction de \mathbb{L}^1 on obtient l'inégalité voulue

Pour tout $\epsilon > 0$, on a une décomposition de f ,

$$f = g + \varphi \quad \text{avec } g \in \mathbb{L}^1 \cap L^\infty, \|\varphi\|_1 < \epsilon$$

Ce qui précède montre que :

$$\int \overline{\lim}_{t, t' \rightarrow +\infty} |M_t f - M_{t'} f| d\mu \leq 2\delta\epsilon$$

puisque $M_{[t]}g$ et $M_{[t']}g$ convergent vers $M_{0,0}\tilde{g}$ μ -p.p..

Nous avons ainsi prouvé que $M_t f \rightarrow \check{f} = M_{0,0}\tilde{f}$ μ -p.p., \tilde{f} ayant été définie dans le cas du semi-groupe discret engendré par T_1 et T_2 .

La limite ergodique est invariante pour les moyennes $M_{j,k}$ puisque $\check{f} = T_1 \check{f} = T_2 \check{f}$. En utilisant des décompositions de \mathbb{R}_+^2 en carrés de côté $\frac{1}{2^p}$, on obtient :

$$\check{f} = \frac{1}{4^p} \int \int_{\substack{\frac{j}{2^p} < x_1 < \frac{j+1}{2^p} \\ \frac{k}{2^p} < x_2 < \frac{k+h}{2^p}}} (T_x \check{f}) d\lambda(x), \quad \mu \text{ - p.p.}$$

Si x_0 est un point de continuité de l'application $y \mapsto T_y^v f$ de \mathbb{R}_+^2 dans \mathbb{L}^1 , on en déduit $\check{f} = T_{x_0}^v f$ μ -p.p. Et, d'après les propriétés de continuité des semi-groupes fortement mesurables [3], on en déduit que $\check{f} = T_x^v f$ a lieu aussi presque partout en x .

Il est aussi possible d'obtenir l'analogie de la proposition V-1, sous la forme suivante :

Soit $\omega : x \mapsto \omega(x)$ une fonction > 0 , borélienne bornée, et telle que $\int_{\mathbb{R}_+^2} \omega(x) d\lambda(x) = 1$. Appelons W la contraction barycentre :

$$W = \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega(x) T_x d\lambda(x).$$

Proposition VI-1 :

Pour tout $f \in \mathbb{L}^1$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_t f = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j < n} W^j f \quad \mu\text{-p.p.}$$

Le théorème V-1 donne pour tout borélien B de \mathbb{R}_+^2 et tout point fixe h de W dans \mathbb{L}^1 ,

$$\int_B \frac{1}{\omega} d\lambda \int_B \omega(x) T_x h d\lambda(x) = h \quad \mu\text{-p.p.}$$

On en déduit en presque tout point x_0 , $T_{x_0} h = h$ μ -p.p.

Soit alors $f = h + f'$ la décomposition de f relativement à W , c'est à dire telle que $h = W h$, $f' \in \overline{(I - W) \mathbb{L}^1}$.

f' est orthogonale à tous les $\varphi \in \mathbb{L}^\infty$ vérifiant $\varphi = W^* \varphi$.

Mais, cette dernière égalité entraîne $\varphi = T_x^* \varphi$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+^2$. Donc $f' = M_t f' \perp \varphi$ ce qui implique

$$f' = \lim_{t \rightarrow +\infty} M_t f' \perp \varphi.$$

Puisque $h = W h$ on en déduit :

$$f = \lim_{t \rightarrow +\infty} M_t f \perp \varphi,$$

donc $h - \lim_{t \rightarrow +\infty} M_t f \perp \varphi$ quel que soit $\varphi \in \text{Ker} (I - W^*)$ dans L^2 .
 Or $h - \lim_{t \rightarrow +\infty} M_t f$ est W - invariante, donc nulle (mod μ). \square

Nous avons voulu signaler le rôle de ces contractions barycentres qui, du point de vue ergodique, se comportent comme les moyennes ergodiques. Et ceci se généralise - t - il, peut - être, à des moyennes ergodiques plus générales que celles qui ont été envisagées jusqu'à présent, tout au moins dans le cas des opérateurs

On peut enfin identifier la limite de $M_t f$ en utilisant la proposition I-1 et les résultats du paragraphe IV.

Soit \tilde{w} la fonction qui est à W ce que v est à T dans la proposition I-1, s la fonction associée à la décomposition de Akcoglu - Brunel de l'opérateur W . On peut écrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_t f = \tilde{s} \tilde{w} E \left[\frac{sf}{\tilde{w}} \right] \mathbb{1}_{\cap \text{supp} (s)} ,$$

où $\text{supp} (s) = \text{supp} (\tilde{w})$, l'espérance conditionnelle étant prise par rapport à la mesure finie $\tilde{w} \cdot \mu$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.A. AKCOGLU and A. BRUNEL,
" Contractions on L^1 -spaces "
Trans. Am. Math. Soc. 155 , 2 , April 1971

- [2] R. V. CHACON and U. KRENGEL,
" Linear modulus of a linear operator "
Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) , 553-559

- [3] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ