M. FLEXOR

Équidimensionnalité des fibres formelles d'un anneau local Noetherien

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 11, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A11_0>

EQUIDIMENSIONNALITE DES FIBRES FORMELLES D'UN ANNEAU LOCAL NOETHERIEN

Mme M. FLEXOR

I - Rappels

Soit A un anneau local noethérien. On dit que A est équidimensionnel, si pour tout idéal premier minimal P de A, on a : dim A/P = dim A. Il est dit strictement équidimensionnel si pour tout P $\in$ Ass A, on a : di A/P = dim A. (Par exemple A intègre). Ceci signifie encore que si on pose X = Spec A, toutes les composantes irréductibles (resp. tous les cycles associés dans le cas "strictement") sont de dimension dim(X).

On dit que A est caténaire si, étant donnés deux idéaux P $\subset$ Q, les chaines d'idéaux premiers joignant P à Q ont même longueur. Lorsque A est équidimensionnel, on a dim A/P + dim A_P = dim A pour tout idéal premier P.

Il est universellement caténaire si toute A-algèbre de type fini est catenaire. On peut voir qu'il suffit que A[T] soit catenaire.

Par exemple, un anneau complet est catenaire.

Posons maintenant $\underline{m}$ = rad(A), k = A/$\underline{m}$, F = Frac(A), $\hat{A}$ le complété $\underline{m}$-adique de A. Posons Y = Spec A, $\hat{Y}$ = Spec $\hat{A}$, f : $\hat{Y} \longrightarrow Y$, U = Y - {m}, A intègre.

Nous avons alors la caractérisation suivante :

Proposition I. *A est universellement catenaire, si et seulement si $\hat{A}$ est équidimensionnel.*

Il est très facile de voir que si A est équidimensionnel, alors A est catenaire. Pour la condition suffisante, cf. E.G.A. IV, 7.I.II.

Inversement, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe donc une composante irréductible Z de $\hat{Y}$ telle que dim $\hat{Y}$ > dim Z. Nous allons procéder à plusieurs réductions.

a) <u>Réduction au cas où A est hensélien</u>

Soit A' une A-algèbre finie unibranche, $A' \subset \text{Frac } A$ comme A est universellement catenaire, pour tout idéal maximal $\underline{n}$ de A', on a $\dim A'_{\underline{n}} = \dim A$. De plus, $({}^{n}A'_{\underline{n}})^{\wedge} = (A'_{\underline{n}})^{\wedge}$ et on voit facilement que $\text{Spec}(A')^{\wedge}$ possède une composante irréductible Z' dominant Z telle que dim Z' = dim Z. Cette composante irréductible est une composante irréductible d'un $\text{Spec}(A'_{\underline{n}})^{\wedge}$ pour un certain idéal maximal $\underline{n}$ de A'.
On peut alors supposer $A = {}^{n}A'_{\underline{n}}$ qui est intègre et hensélien.

b) <u>Réduction au cas ou dim Z = I</u>

Si dim Z > I, soit $F = \{z \in Z,\ z \notin f^{-I}(o),\ \dim O_z = I\}$.
Comme dim Z > I, $m\hat{A} \notin F$ et F est infini. Soit $Z_I, \ldots, Z_i$ les autres composantes irréductibles de $\hat{Y}$. On a $\dim F \cap Z_i \geq I$, donc $F \cap Z_i = \emptyset$ ou est fini.
Soit z un élément de F tel que $z \notin \cup(F \cap Z_i)$. Soit $y = f(z)$, on a $\dim O_y = I$ et comme A est catenaire $\dim \{\overline{y}\} = \dim Y\text{-}I$. Posons $B = O_{\{\overline{y}\}}$, donc $\dim B = \dim A\text{-}I$. De même si $Z' = \{\overline{z}\}$, on a $\dim Z' = \dim Z\text{-}I < \dim \hat{B}$ et Z' est une composante irréductible de Spec $\hat{B}$. En réitérant l'opération, on aboutit à un anneau hensélien de dimension 2 tel que Spec $\hat{B}$ a une composante irréductible de dimension I. Ceci est impossible en vertu du lemme suivant :

<u>Lemme</u>. <u>Soit (A,m) un anneau hensélien intègre de dimension</u> ≥ 2, <u>alors U est connexe</u>.

Soit A' le clôture intégrale de A qui est un anneau local, $\dim A' \geq 2$, posons $V = \text{Spec } A' - \{\text{rad}(A')\}$. Alors

$$0 \longrightarrow A(U) \longrightarrow A'(V) = A'.$$

Donc A(U) est entier sur A et donc local.
Nous allons maintenant donner une "caractérisation birationnelle" des anneaux universellement catenaires. Pour cela, nous allons faire quelques prélimi-

naires. Soit q un idéal de définition de A, on considère $Z = \mathrm{Proj}(\oplus q^n)$ l'éclaté de A le long de q. Soit $g : Z \longrightarrow Y$ le morphisme projectif birationnel canonique, $\hat{g} : \hat{Z} \longrightarrow \hat{X}$ déduit de z par le changement de base $\hat{Y} \longrightarrow Y$. On a $\hat{Z} = \mathrm{Proj}(\oplus q^n \hat{A})$ et l'isomorphisme canonique, $gr_q A \simeq gr_{q\hat{A}}(\hat{A})$, montre que si $D = \mathrm{Proj}(gr_q A)$, alors $f_D : \hat{Y} \underset{Y}{\times} D \longrightarrow D$ est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier D au diviseur exceptionnel de $\hat{Z}$.

Si de plus q est engendré par un système de paramètres, D est irréductible et si D_o est le schéma réduit associé, on a $D_o = f^{-I}(y) \simeq P_k^{n-I}$ où n = dim A, c'est-à-dire si $(x_i)_{I \leqslant i \leqslant n}$ est le système de paramètres engendrant q et si $B_i = A[x_i/x_i, \ldots, x_n/x_i]$, les images des x_j/x_i dans $B_i/\underline{m}B_i$ sont algébriquement indépendants sur k.

Enfin, notons W le normalisé de Z, $W \xrightarrow{\varphi} Z$ le morphisme associé, $D' = h^{-I}(D)$, $T = \{z \in D, \dim O_{Z,z} \geqslant 2\}$, $T' = \{z' \in D', \dim O_{W,z'} \geqslant 2\}$
On a le résultat suivant :

Proposition I : Les conditions suivantes sont équivalentes

i) A est universellement catenaire ;

ii) Soient (Z_j) les composantes irréductibles de $\hat{Z}$, alors $\mathrm{codim}(D \cap Z_j, \hat{Z}) = I$ ou encore $D_o \subset Z_j$;

iii) $g^{-I}(T) = T'$;

iv) pour toute composante irréductible Z_j de $\hat{Z}$, on a : $\mathrm{codim}\,(Z_i \cap T, \hat{Z}) \geqslant 2$;

iv) bis : pour tout ouvert V tel que $T \supset Z-V$, alors la O_Z-algèbre $i_*(O_V)$ est entier sur O_Z, où $i : V \longrightarrow Z$.

Nous allons donner quelques indications pour la démonstration de cette proposition :

iii) $\Longrightarrow$ iv) Soit V un tel ouvert, $V' = \varphi^{-I}(V)$, c'est un ouvert qui contient tous les points de codimension $\leq$ I de W, donc $O_V \hookrightarrow O_{V'} = O_W$ et O_V est bien entier sur O_Z.

i) $\Longrightarrow$ ii) Tout d'abord, g est fermé et est un isomorphisme en dehors de U, donc pour tout j, $Z_j \cap D \neq \emptyset$. Soit ξ un point fermé de $Z_j \cap D$, c'est aussi un point fermé de D_o, donc $k(\xi)$ est algébrique sur k. Comme $\hat{Z} \longrightarrow \hat{Y}$ est un isomorphisme sur $U' = f^{-I}(U)$, si z est un point générique de Z_j, z est encore un point générique d'une composante irréductible V_j de $\hat{Y}$. Par hypothèse dim Y_j = dim Y. La formule des dimensions donne :

$$\begin{aligned}\dim O_{Z_{j,\xi}} &= \dim Y_j + \operatorname{deg\,tr}_k k(\xi)\\ &= \dim Y.\end{aligned}$$

De plus $O_{\hat{Z},\xi} \longrightarrow O_{Z_{j,\xi}} \longrightarrow 0$ et $O_{D_{o,\xi}} \longrightarrow O_{Z_{j,\xi}} / \underline{m}\, O_{Z_{j,\xi}} \longrightarrow 0$.

Comme D_o est intègre et $\dim O_{D_{o,\xi}} = n-I$, on voit que la précédente surjection est un isomorphisme, en effet comme q est primaire pour $\underline{m}$, $\underline{m}^e \subset q$ pour un certain entier e et $q\, O_{Z_{j,\xi}}$ est principal. Donc $D_o \subset Z_j$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Comme $Z_j \neq D_o$ et $\dim D_o = n-I$, pour tout j, on a $\dim Z_j = n$ et toute composante irréductible de $\hat{Z}$ domine une composante irréductible de $\hat{Y}$.

iii) $\Longrightarrow$ ii) Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit ξ un point générique d'une composante irréductible de $D \cap Z_j$. Comme D est défini par une équation, on a $\dim O_{Z_{j,\xi}} = I$, autrement dit si on pose $R = O_{Z,\xi}$ $R' = O_{\hat{Z},\xi}$, on a $\dim R \geq 2$ et Spec $R' - \{\xi\}$ n'est pas connexe. Comme $g^{-I}(T) = T'$, on peut voir que cette solution se transmet à toute R-algèbre locale essentiellement finie sur R. On peut donc supposer R unibranche où ceci devient alors impossible.

Proposition I-bis. Les conditions suivantes sont équivalentes :

I) A est strictement équidimensionnel

2) D_o est contenu dans tout cycle associé à $\hat{Z}$.

3) Pour tout ouvert $V \supset Z - T$, O_X est fini sur O_Z.

(On note encore O_V la O_Z-algèbre $i_*(O_V)$, ou $i : V \longrightarrow Z$).

Corollaire I : Soit $A \longrightarrow R$ un homomorphisme plat d'anneaux locaux intègres tels que (rad A) R = rad(R) et tels que k(R) soit algébrique sur k(A). Alors $\hat{A}$ est équidimensionnel (resp. strict.), si et seulement si $\hat{R}$ l'est.

En particulier

Corollaire 2 : Si A est géométriquement une branche, alors A est strictement équidimensionnel, si et seulement si $({}^n S_A)^\wedge$ l'est.

Référence : Article à paraitre à la S.M.F. : sur certains éclatements.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° II

M. FLEXOR
I72, Avenue de Choisy
75 - PARIS I3^e