PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

CHRISTIAN PESKINE

Courbes lisses qui ne sont pas intersection de 3 surfaces dans l'espace projectif

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 14, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A14_0>

<u>COURBES LISSES QUI NE SONT PAS INTERSECTION</u>

<u>DE 3 SURFACES DANS L'ESPACE PROJECTIF</u>

Christian PESKINE

On se propose essentiellement ici, de montrer qu'il existe dans l'espace projectif des courbes <u>lisses</u>, qui ne sont pas l'intersection de 3 surfaces.

<u>Définition</u> : <u>On dira qu'une variété V de</u> $\mathbb{P}_k^n$ (<u>resp</u>. A_k^n) <u>est l'intersection des hypersurfaces</u> S_i <u>d'équations</u> f_i <u>si</u>

$$V = \mathrm{Proj}(k[X_o,\dots,X_n]/(f_i))$$

(<u>resp</u>. $V = \mathrm{Spec}(k[X_I,\dots,X_n]/(f_i))$.

Rappelons qu'Abyankhar a montré que sur un corps algébriquement clos k, toute courbe lisse dans l'espace affine est l'intersection de 3 surfaces. Montrons qu'il n'en est pas de même dans $\mathbb{P}_k^3$.

<u>Théorème I</u> : <u>Soit k un corps infini. Soit V une variété fermée de dimension</u> $d \geq I$ <u>dans</u> $\mathbb{P}_k^n$. <u>Supposons que V admet un cône de Cohen-Macaulay, et que V est génériquement une intersection complète*. Alors si V est l'intersection de</u> (n-d+I) <u>hypersurfaces dans</u> $\mathbb{P}_k^n$, <u>l'unique idéal gradué</u> $\mathfrak{a}$ <u>tel que</u>

$$V = \mathrm{Proj}\ k[X_o,\dots,X_n]/\mathfrak{a}$$

<u>et que</u> $k[X]/\mathfrak{a}$ <u>est de Cohen-Macaulay est engendré par</u> (n-d+I) <u>équations</u>.

A un lemme d'évitement près, ce théorème se démontre comme le théorème local suivant :

<u>Théorème I bis</u> : <u>Soit R un anneau local régulier de dimension n. Soit</u> $R/\mathfrak{a}$ <u>un quotient de R, de dimension</u> $d \geq 2$, <u>de Cohen-Macaulay et génériquement une intersection complète dans R. Supposons que le corps résiduel k de R est in-</u>

fini. Alors i il existe n-d+I éléments de $\mathfrak{a}$, soient $\alpha_I, \ldots, \alpha_{n-d+I}$ tels que $\mathfrak{a}/(\alpha_I, \ldots, \alpha_{n-d+I})$ est un module de longueur finie, l'idéal $\mathfrak{a}$ est engendré par au plus (n-d+I) éléments.

Définition : Dire que V (resp. $R/\mathfrak{a}$) est génériquement une intersection complète dans $\mathbb{P}^n_k$ (resp. R), c'est-à-dire qu'il existe une intersection complète X dans $\mathbb{P}^n_k$ (resp. R/I dans R) et une immersion $V \hookrightarrow X$ (resp. une surjection $R/I \longrightarrow R/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$), induisant un isomorphisme et un ouvert dense de V sur un ouvert de X (resp. tel qu'il existe un élément S de R tel que l'application $(R/I)_s \longrightarrow (R/\mathfrak{a})_s$ soit un isomorphisme et que Spec $(R/\mathfrak{a})_s$ soit dense dans Spec $R/\mathfrak{a}$).

Remarque : Si V (resp. $R/\mathfrak{a}$) est réduite et équidimensionnelle, V (resp. $R/\mathfrak{a}$) est génériquement une intersection complète.

On aura besoin du résultat préliminaire suivant :

Proposition (P. Dubreil) : Soit k un anneau local de Gorenstein de dimension $\geqslant$ I. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de R tels que

I) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$

2) $R/\mathfrak{a}$ et $R/\mathfrak{b}$ sont sans composante immergée

3) $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b})$ est de codimension $\geqslant$ I dans $V(\mathfrak{a})$ et $V(\mathfrak{b})$.

Alors

(i) $\mathrm{Hom}(R/\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{b}$ et $\mathrm{Hom}(R/\mathfrak{b}, R) = \mathfrak{a}$

(ii) $R/\mathfrak{a}$ de Cohen-Macaulay $\Longleftrightarrow$ $R/\mathfrak{b}$ de Cohen-Macaulay.

i) $\alpha\mathfrak{a} = 0 \Longrightarrow \alpha(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b} \Longrightarrow \alpha \in \mathfrak{b}$ (par 2)).

ii) Rappelons la proposition suivante

<u>Proposition</u> (Auslander) : <u>Pour tout R-module de type fini M, on a la relation</u>

$$\text{Prof}.M + \sup \{i, \text{Ext}^i(M,A) \neq 0\} = \dim R.$$

Supposons $R/\mathfrak{a}$ de Cohen-Macaulay. Cela implique $\text{Ext}^i(R/\mathfrak{a}, R) = 0$ pour $i > 0$. Soit $L.$ une résolution libre minimale du R-module $R/\mathfrak{a}$.

Apppliquons lui le foncteur $.^{v} = \text{Hom}(.,R)$, on trouve une suite exacte :

$$0 \longrightarrow R/\mathfrak{a}^{v} \longrightarrow L_0^{v} \longrightarrow L_I^{v} \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow L_i^{v} \longrightarrow \ldots$$

Comme $(R/\mathfrak{a})^{v} = \mathfrak{b}$ et comme $L_o = R$, on en déduit que $R/\mathfrak{b}$ est un n-module de Syzygies pour tout n, ce qui implique que $R/\mathfrak{b}$ est de Cohen-Macaulay.

Montrons maintenant les deux théorèmes. Comme les démonstrations sont identiques, appelons aussi R l'anneau gradué $k[X_o,\ldots,X_n]$.

Soient $P_I,\ldots,P_r$ les idéaux premiers de R, minimaux contenant $\mathfrak{a}$ (Dans le cas gradué, ils sont homogènes). Remarquons qu'on peut choisir les éléments $\alpha_I,\ldots,\alpha_{n-d+I}$ (homogènes dans le cas gradué) tels que $\underline{\alpha} = \alpha_I,\ldots,\alpha_{n-d}$ est une suite R-régulière, et que $\underline{\alpha}\, R_{P_i} = \mathfrak{a}\, R_{P_i}$ pour $i = I,\ldots,r$.

C'est une conséquence de

<u>Proposition</u> : <u>Soit A un anneau local de Cohen-Macaulay (resp. une algèbre graduée de type fini sur un corps). Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal (resp. gradué) de A tel que si</u> $P_I,\ldots,P_r$ <u>sont les idéaux premiers minimaux contenant</u> $\mathfrak{a}$ <u>de A et si</u> $S = \bigcap_I^r (A-P_i)$, <u>l'idéal</u> $\mathfrak{a}\, S^{-I}A$ <u>est engendré par une suite</u> $S^{-I}A$<u>-régulière de longueur g.</u>

<u>Alors si le corps résiduel (resp. le corps de base) k de A est infini, il existe des éléments (resp. homogènes)</u> $\alpha_I,\ldots,\alpha_g$ <u>de</u> $\mathfrak{a}$ <u>, tels que</u>

I) $\underline{\alpha} = \alpha_I,\ldots,\alpha_g$ <u>est une suite A-régulière</u>

2) $\alpha_I,\ldots,\alpha_g$ <u>se prolonge en un système minimal de générateurs (resp. homogènes) de</u> $\mathfrak{a}$

3) $\underline{\alpha}\, S^{-I}A = \mathfrak{a}\, S^{-I}A$.

La proposition est évidente pour g = 0. Faisons donc une récurrence.
Il suffit évidemment de montrer qu'il existe un élément (resp. homogène) α de $\mathfrak{a}$, tel que

I) α est A-régulier i.e $\alpha \notin \underline{q}$ pour tout idéal premier q associé à A

2) α appartient à un système minimal de générateurs de $\mathfrak{a}$, i.e $\alpha \notin m\mathfrak{a}$ où m est l'idéal maximal de A (resp. l'idéal des éléments homogènes de $d^o > 0$)

3) L'image de α dans $S^{-I}A$ appartient à un système minimal de générateurs de $\mathfrak{a}S^{-I}A$, i.e $\alpha \notin P_i(\mathfrak{a} A_{P_i}) \cap A$, pour tout $i = I,\dots,r$

Pour le cas local, cette proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant :

<u>Lemme</u> : <u>Soit A un anneau local noethérien de corps résiduel infini. Alors si un idéal de A est contenu dans une réunion finie d'idéaux, il est contenu dans l'un de ces idéaux.</u>

Ce lemme se démontre facilement au moyen du lemme d'évitement pour les espaces vectoriels de type fini sur un corps <u>infini</u>, et du lemme de Nakayama.
Pour le cas gradué, on procède différemment : si $\mathfrak{a} = \sum_{i>o} \mathfrak{a}_i$, soit n le plus grand entier tel que $\mathfrak{a}_n \not\subset m\mathfrak{a}$. On montre alors que :
$\mathfrak{a}_n \not\subset q_n$ pour tout idéal premier q associé à A, et que
$\mathfrak{a}_n \not\subset (P_i(\mathfrak{a} A_{P_i}) \cap A)_n$ pour $i = I,\dots,r$.
On conclut alors de nouveau au moyen du lemme d'évitement sur les corps infinis.

Revenons alors à la démonstration des théorèmes.

Considérons l'idéal $\underline{\alpha} = (\alpha_I,\dots,\alpha_{n-d})$. En écrivant une décomposition primaire de $\underline{\alpha}$, on constate qu'il existe un idéal $\mathfrak{b}$ de R tel que $\underline{\alpha} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, que $V(\mathfrak{a})$ et $V(\mathfrak{b})$ soient sans composante immergée, et que $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b})$ soit de codimension $\geq$ I dans $V(a)$ et $V(b)$. D'après le théorème de Dubreil, R/b est un anneau de Cohen Macaulay (gradué dans le cas gradué). On vérifie que $\underline{\alpha} : \alpha_{n-d+I} = b$. En effet, $\alpha_{n-d+I}x \subset \underline{\alpha}$ implique $x\, a^m \subset \underline{\alpha}$ pour $m \geq 0$, donc $x \in b$.

On en déduit une suite exacte :

(*) $\quad 0 \longrightarrow R/b \longrightarrow a/\underline{\alpha} \longrightarrow a/\underline{\alpha},\alpha_{n-d+I} \longrightarrow 0.$

Comme R/b et $a/\underline{\alpha}$ sont des modules de Cohen-Macaulay de dimension ≥ 2, on a prof $a/\underline{\alpha},\alpha_{n-d+I} \geq$ I, ou $a/\underline{\alpha},\alpha_{n-d+I} = 0$ en chaque point fermé de $R/\underline{\alpha}$.

Cela implique bien $a = \underline{\alpha},\alpha_{n-d+I}$, ce que nous voulions démontrer.

Corollaire. Soit k un corps algébriquement clos. Il existe des courbes lisses et irréductibles de $\mathbb{P}^3_k$ qui ne sont pas intersection de 3 surfaces.

Compte tenu du théorème, il suffit de montrer qu'il existe des courbes arithmétiquement normales dans $\mathbb{P}^3_k$, dont l'idéal premier gradué ne peut pas être engendré par 3 éléments.

Pour cela, considérons par exemple une matrice (n,n+I) à coefficients indéterminés X^i_j. Ses n-déterminants définissent dans $\mathbb{P}^{n(n+I)-I}_k$ une variété V de codimension 2, dont le cône est de Cohen-Macaulay. Le lieu singulier de V est le fermé défini par les (n-I)-déterminants de la matrice. Il est de codimension 6 dans l'espace $\mathbb{P}^{n(n+I)-I}_k$. Si k est algébriquement clos, on en déduit que V est géométriquement R_3.

D'après le théorème de Bertini, on peut couper V par n(n+I)-4 hyperplans, de façon à obtenir une courbe lisse dans $\mathbb{P}^3_k$. Soit C cette courbe. Comme C est une intersection complète dans V, C a un cône de Cohen-Macaulay. Donc C est connexe, et donc réduite et irréductible.

Soit P l'idéal premier gradué de C dans $\mathbb{P}^3_k$. Si a est l'idéal gradué premier de V dans $\mathbb{P}^{n(n+I)-I}_k$, et si $\alpha_I,\dots,\alpha_{n(n+I)-4}$ sont les équations des hyperplans par lesquels on a coupé V, on a $P = \frac{\mathfrak{a} + \underline{\alpha}}{\underline{\alpha}} \sim \mathfrak{a}/\underline{\alpha} \cap \mathfrak{a}$.

Mais comme les α_i forment une suite régulière dans l'anneau intègre du cône de V, on a $\mathfrak{a} \cap \underline{\alpha} = \mathfrak{a}\underline{\alpha}$, donc $P \simeq \mathfrak{a}/\underline{\alpha}\mathfrak{a}$, ce qui prouve bien que P est engendré par (n+I) éléments.

Remarque I : C'est un simple exercice d'algèbre commutative de montrer que toute courbe lisse de $\mathbb{P}^3_k$ est l'intersection de 4 surfaces.

Question : Le problème reste ouvert pour les courbes lisses qui ne sont pas arithmétiquement normales.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° I4 PESKINE
I64, rue de Vaugirard
75 - PARIS I5^e