PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

L. SZPIRO

Variétés de codimension 2 dans P^n

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A15_0>

VARIETES DE CODIMENSION 2 DANS P^n

L. SZPIRO

Soit $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ une immersion fermée où k est un corps. Une telle variété X est définie par un idéal gradué a de $k[X_0,\ldots,X_n] = R$, cet idéal a est unique si on le prend de plus tel que $\mathrm{prof}(R/a) > 0$.
Nous parlerons toujours de cet a (sauf mention du contraire).

Définition. Une variété projective X, plongée dans P^n_k est dite arithmétiquement de Cohen-Macaulay, si elle est définie par un idéal a de $k[X_0\ldots X_n] = R$, tel que R/a soit un anneau de Cohen-Macaulay.

Si maintenant nous considérons X, de codimension 2 dans $\mathbb{P}^n_k$, arithmétiquement de Cohen-Macaulay, alors a est un idéal de dimension projective un sur R qui possède une résolution libre (car il est gradué), telle que la suite

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow R^{n-I} \xrightarrow{\varphi} R^n \longrightarrow R \longrightarrow R/a \longrightarrow 0$$

soit exacte, de plus n est égal au nombre minimal de générateurs de a.
Nous nous proposons de donner la démonstration du théorème suivant qui nous a été communiqué dans le cas où $k = \mathbb{C}$ et X non singulière, par R. Hartshorne.
Les méthodes qu'il utilisait sont analytiques, contrairement à celles qu'on va voir.

Théorème. Soit $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ une variété algébrique de codimension 2, arithmétiquement de Cohen-Macaulay, alors si X est localement intersection complète et si $n \geqslant 6$, X est globalement intersection complète, i.e l'idéal gradué qui la définit dans $k[X_0,\ldots,X_n]$ est engendré par 2 éléments.

Corollaire. Sous les hypothèses de théorème, si de plus X est non singulière $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$.

En effet, il suffit pour montrer cela, de montrer que l'anneau local du sommet du cône de X dans P^n_k est factoriel. Or d'après [3], une intersection complète locale qui est factorielle en codimension 4 est factorielle.

Notons que c'est en montrant ce corollaire que Hartshorne montrait le théorème (pour k = 6 et X non singulière).

Rappelons d'abord, pour prouver le théorème, la proposition suivante [I]

Proposition I. Soient R un anneau noethérien, a un idéal de R de dimension projective I et qui possède une résolution libre

$$0 \longrightarrow R^{m-I} \xrightarrow{\varphi} R^m \longrightarrow a \longrightarrow 0$$

alors si codim_R R/a est égale à deux, a est engendré par les déterminants d'ordre (n-I) de φ.

$$\text{Soit } S = k[X_{ij}]_{\substack{i=I\ldots m-I\\ j=I\ldots m}}$$

en envoyant X_{ij} sur le coefficient correspondant de la matrice φ, on a donc un morphisme d'anneau

$$S \xrightarrow{f} R = k[X_o\ldots X_n]$$

Nous supposerons m > 2 pour montrer le théorème (i.e il nous faut montrer que n $\leqslant$ 5).

Lemme I. Pour que X soit localement intersection complète dans $\mathbb{P}^n_k$, il faut et il suffit que l'idéal engendré par les déterminants d'ordre (m-2) de soit primaire pour l'idéal $(X_o,\ldots,X_n)$ de R.

En effet, a est engendré par 2 éléments sur

$$U = \mathrm{Spec}\, R - \{(X_o\ldots X_n)\} \qquad [I]$$

Donc si $p \in u$, la résolution $(*)_p$ $0 \longrightarrow R_p^{m-I} \longrightarrow R_p^m \longrightarrow a_p \longrightarrow 0$ de a_p n'est pas minimale, celle-ci étant $0 \longrightarrow R_p \longrightarrow R_p^2 \longrightarrow a_p \longrightarrow 0$, de par les propriétés des résolutions minimales $(*)_p$ peut s'écrire

$$0 \longrightarrow R_p^{m-2} + R_p \xrightarrow{\varphi_p} R_p^{m-2} + R_p^2 \longrightarrow a_p \longrightarrow 0$$

de telle façon que φ_p / R_p^{m-2} soit un isomorphisme. c.q.f.d.

<u>Corollaire</u>. <u>Le morphisme</u> S/Kerf $\longrightarrow$ R <u>déduit de f est fini et donc</u>

$$\dim R = n+I = \dim S/\mathrm{Kerf}.$$

En effet, l'idéal engendré par les $f(X_{ij})$ est primaire pour $(X_o \dots X_n)$ d'après le lemme I.

<u>Définition.</u> Nous noterons $\mathfrak{J}_s$ l'idéal de S engendré par les mineurs d'ordre s de la matrice $\phi : S^{m-I} \longrightarrow S^m$, dont les coefficients sont les (X_{ij}).

<u>Lemme 2 [2]</u> $\mathfrak{J}_s$ <u>est un idéal premier de S</u>, $\dim R/\mathfrak{J}_s = (m-s+I)(m-s)$, <u>et le lieu singulier de</u> $R/\mathfrak{J}_s$ <u>est défini par l'idéal</u> $\mathfrak{J}_{s-I}$ <u>et</u> $R/\mathfrak{J}_s$ <u>est un anneau de Cohen-Macaulay</u>.

D'après le lemme I

$$\dim S/\mathrm{Kerf}+\mathfrak{J}_{m-2} = 0.$$

D'autre part, $\mathrm{codim}_S\ S/\mathfrak{J}_{m-2} = (m-m+2+I)\ (m-m+2)$

$$= 6$$

$$\mathrm{codim}_S\ S/\mathrm{Kerf} = m(m-I) - (n+I)$$

Appliquons la formule des codimensions d'intersections

$$\mathrm{codim}\ R/\mathrm{Kerf} + \mathfrak{J}_{m-2} \leq \mathrm{codim}\ R/\mathrm{Kerf} + \mathrm{codim}\ R/\mathfrak{J}_{m-2}$$

donc

$$m(m-I) \leq 6 + m(m-I) - (n+I)$$

i.e $n \leq 5$ c.q.f.d.

Remarque I. Il existe dans $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{P}^4$, $\mathbb{P}^5$ des variétés de codimension 2, localement intersection complètes, arithmétiquement de Cohen-Macaulay et non définies (idéalement) par 2 équations.

- Dans $\mathbb{P}^3$ La cubique gauche définie par les 3 équations (et pas moins)

$$- X_o X_2 - X_I^2$$
$$- X_o X_3 - X_I X_2$$
$$- X_I X_3 - X_2$$

est localement intersection complète d'après le lemme I, car la matrice φ qui lui correspond est

$$\begin{pmatrix} X_o & X_I \\ X_I & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que cette cubique gauche (d'ailleurs définie par le plongement de Véronese de $\mathbb{P}^I$ dans $\mathbb{P}^3$) n'est pas définie par 2 équations (idéalement), car aucun des X_i n'est inversible

- Dans P^5 Le plongement de Segré de $X = \mathbb{P}^I \times \mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^5$ définit X comme arithmétiquement de Cohen-Macaulay, la matrice φ qui lui correspond est

$$\begin{pmatrix} X_{II} & X_{I2} \\ X_{2I} & X_{22} \\ X_{3I} & X_{32} \end{pmatrix}$$

dans l'anneau $h[X_{ij}]_{\substack{i=I,2 \\ j=I,2,3}}$

ses équations sont $X_{II} X_{22} - X_{2I} X_{I2}$

$$X_{II} X_{32} - X_{3I} X_{I2}$$
$$X_{2I} X_{32} - X_{3I} X_{22}$$

X est non singulière (donc localement intersection complète) et $\mathrm{Dic}(X) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

<u>Remarque 2</u>. Pour qu'une matrice $\varphi: R^{m-I} \longrightarrow R^m$ définisse un idéal de dimension projective I à la manière de la proposition I, il faut et il suffit que

$$\operatorname{codim}_R R/\mathcal{I}_{m-I}(\varphi) = 2.$$

- <u>dans $\mathbb{P}^4$</u> (suite de la remarque I)

$$R = k[X_o \dots X_4]$$

Considérons la matrice

$$\varphi = \begin{pmatrix} X_o & X_2 \\ X_I & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{pmatrix}$$

Soit $S = k[X_{ij}]_{\substack{i=I,2 \\ j=I,2,3}}$

Considérons comme précédemment le morphisme $f : S \longrightarrow R$

codim dim S/Kerf = dimR = dim S-I

Kerf est engendré par un élément gradué F de S ; or on a la relation

$$X_{3I} - X_{I2} \in \text{Kerf},$$

donc $F = X_{3I} - X_{I2}$ par des arguments de degré.

La suite

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow S^2 \xrightarrow{(X_{ij})} S^3 \longrightarrow S \longrightarrow S/\mathcal{I}_2 \longrightarrow$$

étant exacte d'après la remarque 2.

Pour montrer que la matrice φ définit, par ses déterminants d'ordre 2 une variété de codimension 2 X dans $\mathbb{P}^4$, il nous suffit de prouver que $(*) \otimes$ S/Kerf est exacte, en effet S/Kerf est régulier, S/Kerf $\hookrightarrow$ R est fini et donc plat.

Montrer que $(*) \underset{S}{\otimes}$ S/Kerf est exacte, est équivalent à montrer que $F = (X_{3I}-X_{I2})$ est régulier dans $S/\mathcal{I}_2$. Or $\mathcal{I}_2$ est premier (lemme 2) et $F \notin \mathcal{I}_2$, on a donc montré que

- X est de codimension 2 dans $\mathbb{P}^4$
- son idéal est défini par 3 équations
- X est localement intersection complète (par le lemme I).

Remarque 3. On peut traduire le théorème dans le cas local, il est tout aussi vrai : R régulier local, dim $R \geqslant 6$ a un idéal de R tel que R/a soit Cohen Macaulay, $\operatorname{codim}_R R/a = 2$ et R/a est localement intersection complète sur Spec R -(point fermé), alors a est engendré par 2 éléments.

BIBLIOGRAPHIE

[I] C. PESKINE et L. SZPIRO "Dimension projective finie et cohomologie locale" Publications Math. IHES n° 42.

[2] LAKSOV "On the arithmetical Cohen-Macaulay of Schubert varieties" à paraître.

[3] GROTHENDIECK SGA 62 Bures/Yvette on North Holland-Masson.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° I5 SZPIRO
I4, rue de la Butte aux Cailles
75 - PARIS I3e