DANIEL LAZARD

Calculs sur les modules projectifs

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 1, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A1_0>

CALCULS SUR LES MODULES PROJECTIFS

Daniel LAZARD

I - Introduction

Les calculs exposés ici ont été menés à bien afin de tester sur ordinateur le conjecture suivante de Serre : tout module projectif sur un anneau de polynômes est libre (I).

Pour préciser les idées, il est utile de rappeler les principaux résultats obtenus dans cette direction.

I. Tout module projectif sur un anneau de polynômes en variables non commutatives est libre (P.M. Cohn [I]).

2. Si A est un anneau commutatif de spectre maximal noethérien et de spectre connexe, tout module projectif de rang infini est libre. En particulier, tout $K[X_I,\ldots,X_n]$-module projectif de rang infini est libre (Hinohara [I] ; voir aussi Bass [2]).

3. Si A est un anneau commutatif de spectre maximal noethérien de dimension d et de spectre connexe, tout module projectif de rang > d possède un facteur direct libre non nul (Serre [I] amélioré par Bass [I]).

4. Tout $K[X_I,\ldots,X_d]$-module projectif de rang > d est libre (Bass [I]).

5. Si $P + A \simeq A^{2n}$, P possède un facteur direct libre non trivial (Bass [3])

6. Tout $K[X_I,X_2]$-module projectif est libre (Seshadri [I]).

7. Sur un anneau factoriel, tout module projectif de rang I est libre.

(I) "Anneau de polynômes" signifie dans tout ce texte "anneau de polynômes en un nombre fini d'interminées sur un corps" - Les calculs ont été effectués sur les ordinateurs 360/30 de l'OPE et 360/75 du CIRCE.

On voit donc que pour les rangs élevés, le problème est résolu. En particulier pour résoudre le problème pour les anneaux de polynômes à 3 variables, il suffit d'étudier le rang 2.

II - Terminologie

Appelons système projectif de rang n-I sur un anneau A, un système de 2n éléments

$$\begin{pmatrix} x_I,\dots,x_n \\ y_I,\dots,y_n \end{pmatrix}$$

tels que

$$\sum_{i=I}^{n} x_i y_i = I.$$

Un tel système définit un module projectif P tel que $P \oplus A \simeq A^n$: P est le noyau du morphisme $A^n \longrightarrow A$ de matrice $(x_I,\dots,x_n)$ et le conoyau du morphisme $A \longrightarrow A^n$ de matrice

$$\begin{pmatrix} y_I \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

L'échange des x et des y revient à remplacer P par son dual P^*. On appelera donc système dual, le nouveau système ainsi obtenu.

Appelons transformations élémentaires du système projectif les transformations de l'ensemble des systèmes projectifs qui sont composées de transformations de l'un des types suivants, qui conservent P à isomorphisme près :

I. Modification de la numérotation (permutation des éléments de base de A^n).

2. Remplacement de x_I,x_2,y_I,y_2 par $x_I-ax_2,x_2,y_I,y_2+ay_I$.
Cela revient à faire un automorphisme élémentaire au sens de Bass.

3. Remplacement de x_I,x_2,y_I,y_2 par

$x_I,x_2,y_I+ax_2,y_2-ax_I$ ou par $x_I+ay_2,x_2-ay_I,y_I,y_2$, ce qui revient à changer l'un des deux morphismes φ ou Ψ sans changer l'autre.

4. Si $x_I = I+zz'$ et $x_2 = z^2$, remplacement de y_I par $I-zz'$, de y_2 par z'^2 et, pour $i > 2$, remplacement de y_i par 0.

5. Si Θ est un automorphisme de A, remplacement pour tout i, de x_i par $\Theta(x_i)$ et de y_i par $\Theta(y_i)$.

Par ailleurs, si $y_i = 0$, P possède un facteur direct libre de rang I et si y_i est inversible, P qui est engendré par n-I éléments est libre. Il en est de même si $x_i = 0$ ou si x_i est inversible. Dans tous ces cas, nous dirons que le système projectif est <u>trivial</u>. Un système projectif qui peut-être rendu trivial par transformations élémentaires sera dit <u>élémentairement trivial</u>. On a donc :

<u>Lemme I</u>. <u>Le module projectif défini par un système élémentairement trivial possède un facteur direct libre de rang I</u>.

Si A est gradué, on appellera <u>degré</u> du système projectif

$$\begin{pmatrix} x_I,\dots,x_n \\ y_I,\dots,y_n \end{pmatrix}$$

la borne supérieure des degrés de ses éléments.

Un système projectif est <u>libre</u> si le module qu'il définit est libre.

III - <u>Calculus en caractéristique 2</u>.

On suppose ici que $A = K[X,Y,Z]$, le corps K étant le corps à deux éléments. Les résultats obtenus sont les suivants :

<u>Théorème I</u>. <u>Tout A-système projectif de rang 2 et de degré 2 qui n'est pas élémentairement trivial est élémentairement équivalent au système</u>

$$\begin{pmatrix} I+Y+Z+XZ & , & Y^2+YZ+Z^2 & , & Z+XY \\ I+Y+Z+XZ+Y^2+YZ+Z^2 & , & X+Y+Z+X^2+XZ & , & Y+XY+XZ \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Indications sur les méthodes de calculs :

A l'aide des transformations élémentaires, on peut supposer que x_I et y_I ont pour terme constant I et que les autres coefficients n'ont pas de terme constant. On peut également ramener le système des parties de degré $\leq$ I à six formes très simples. Si on écrit que $\sum x_i y_i = I$, on obtient un certain nombre de relations entre les coefficients des x_i et des y_i. Après résolution de celles de ces relations qui sont du premier degré, le nombre des coefficients qui restent indéterminésest assez petit pour que toutes les possibilités soient examinées a l'ordinateur. Les transformations qui ont permis d'avoir des termes de degré 0 et I simples ont l'avantage que le nombre des solutions obtenues finalement est assez faible. Comme le programme élimine celles qui sont trop manifestement élémentairement triviales, les solutions restantes sont assez peut nombreuses pour avoir été traitées à la main.

Théorème 2. Le système (*) définit un module projectif qui est libre.

Pour que (*) définisse un module libre, il suffit qu'il existe des polynômes $A_I, A_2, A_3, B_I, B_2, B_3$ de degré 2 tel que le déterminant

$$\begin{vmatrix} I+Y+Z+XZ & A_I & B_I \\ Z+XY & A_2 & B_2 \\ Y^2+YZ+Z^2 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

soit égal à I. Si on fixe A_I, A_2, A_3, ceci nous donne un système linéaire de 83 équations à 77 inconnues. En faisant varier A_I, A_2, A_3, on obtient 2^{27} tels systèmes. En les résolvant systématiquement, nous avons trouvé la solution :

$$\begin{vmatrix} I+Y+Z+XZ & X(Y+Z) & Y+Z+X^2 \\ Z+XY & I+X(Y+Z) & X+Z+X^2+XY+XZ \\ Y^2+YZ+Z^2 & Y(Y+Z) & I+Y+Z+Y^2+Z^2+XY \end{vmatrix} = I$$

Cette liberté a pu apparaître comme un accident de la caractéristique 2 ; aussi avons nous fait l'essai suivant en caractéristique 0.

IV - Calculs en caractéristique 0

Le système (*) peut se remonter en un $Z[X,Y,Z]$-système

$$(**) \quad \begin{pmatrix} I+Y+Z+XZ & , & Z-XY & , & Y^2+YZ+Z^2 \\ I-(Y+Z+XZ)+(Y^2+YZ+Z^2) & , & Y+XY+XZ & , & X-(Y+Z+XZ)+X^2 \end{pmatrix}$$

Pour chercher s'il est libre sur $\mathbb{R}$, nous avons développé le déterminant

$$\begin{vmatrix} I+Y+Z+XZ & A_I & B_I \\ Z-XY & A_2 & B_2 \\ Y^2+YZ+Z^2 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

où les A_i et les B_i sont des polynômes inconnus de degré 2. Dire que ce polynôme peut être égal au polynôme I revient à résoudre un système de 83 équations bilinéaires sur $\mathbb{R}^{27} \times \mathbb{R}^{27}$.

Nous avons, sur ordinateur, développé ce déterminant pour obtenir ces équations f_i, et calculé $F = \sum f_i^2$ et grad(F).
Le problème est donc ramené à chercher si F a un minimum nul. Pour cela, on choisit une valeur initiale arbitraire que l'on fait varier de manière à diminuer F.

Ce problème d'optimisation s'est avéré très mal conditionné. Parmi les nombreuses méthodes, seule celle de Davidon-Fletcher-Powell a pu donner des résultat ; encore a-t-il fallu la reprogrammer pour améliorer ses performances dans ce cas précis.

En partant des valeurs initiales (0,0,...,0) et (I0,I0,...,I0), on aboutit au même minimum non nul pour lequel G est de l'ordre de $I,78.I0^{-3}$. Mais, en partant de (I0,-I0,I0,...,+I0,-I0), on aboutit a un minimum nul qui nous donne la solution :

$$(***) \quad \begin{vmatrix} I+(Y+Z+XZ) & X-(Y+Z+XZ) & Y+Z+XZ \\ Z-XY & I-(Z-XY) & X+(Z-XY) \\ Y^2+YZ+Z^2 & Y+Z+XY-(Y^2+YZ+Z^2) & I-Y+XZ+(Y^2+YZ+Z^2) \end{vmatrix} = I$$

Donc :

Théorème 3. Le $Z[X,Y,Z]$-système projectif (**) est libre.

Remarque : Pour limiter le nombre des solutions, on avait imposé au départ la forme ci-dessus pour les termes de degré 0.

V - Conclusions.

Il est manifeste qu'aucun résultat tangible n'a été obtenu. On peut faire cependant les remarques suivantes :

I. Nous nous sommes limités au degré 2, mais l'expérience que nous avons nous laisse conjecturer que si la conjecture de Serre est fausse, il y a un contre-exemple en degré 2.

2. Aussi bien en caractéristique 2 qu'en caractéristique 0, la liberté de (**) semble bien accidentelle.

Il est possible que d'autres relèvements de (*) sur Z soient non libres.

3. Il semble que le minimum nul obtenu pour F soit le seul. En tout cas, il y a peu de tels minima. Il y a deux arguments qui nous font penser cela ;

a) le point de départ est très loin du minimum ;

b) le fait surprenant que les valeurs des variables au minimum soient entières.

En effet, s'il y a une seule solution complexe, elle est invariante pour tout automorphisme algébrique de C. Elle est donc rationnelle. Il resterait à expliquer pourquoi les valeurs de la variable au minimum sont entières et de valeur absolue $\leq$ I.

Tout ceci fait penser que (***) pourrait être un élément de SL_3 qui n'est pas dans E_3 (au sens de Bass).

Comme la borne supérieure des valeurs absolues des coefficients trouvés est inférieure à la borne supérieure des coefficients du système projectif de départ, on est amené à faire la conjecture. "Si un système projectif de degré p est libre, on peut plonger sa première ligne dans une matrice de déterminant I, et dont les éléments sont de degré au plus p.
(Le lien avec ce qui précède est clair si on généralise cette conjecture en terme de valuations).

- BIBLIOGRAPHIE -

[I] H.BASS. K-theory and stable algebra. Publ. IHES n°22 (I964)

Big projective modules are free. Illinois J. Math (I963)

Modules wich support non singular forms. J. Algebra (I969).

[2] P.M. COHN. Free associative algebras. Bull. London Math. Soc. (I969)

[3] R.FLETCHER-M.J.D. POWELL. A rapidly convergent descent method for minimisation - Computer Journal (I963).

[4] Y. HINOHARA. Projective modules over weakly noetherian rings. J. Math. Soc. Japan (I963).

[5] J.P. SERRE. Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle Séminaire Dubreil Pisot (I957-I958).

[6] C.S. SESHADRI. Trivialy of vector bundles over the affine space K^2. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. (I958).

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° I D. LAZARD
3, rue Boissonade
75 - PARIS (I4^{e})